3. Aufgabenblatt vom Mittwoch, den 25.April 2012 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker II

(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 04. Mai 2012, 10.15 Uhr

1. **Polynome** (6 Punkte)

   (a) Wie oft schneidet sich der Funktionsgraph eines reellen Polynoms 7. Grades mit einer Geraden mindestens und wie oft höchstens? Kurze Begründung.

   (b) Bringen Sie die folgenden unecht gebrochen rationale Funktionen auf die Form Polynom plus echt gebrochen rationale Funktion.

   $$\frac{x^3+x^2+1}{x-1}, \quad \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}, \quad \frac{x^3+x^2+1}{x^3-1}$$

   (c) Ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ heißt gerade, falls für alle reelle x_0 gilt $p(x_0) = p(-x_0)$. Beweisen Sie, dass $p(x)$ genau dann gerade ist, wenn das Polynom nur gerade Potenzen von x enthält.

2. **Horner und Polynomentwicklung** (4 Punkte)

   (a) Unter der Entwicklung des Polynoms $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ an der Stelle x_0 versteht man eine Darstellung der Form $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^i$. Zeigen Sie, dass eine solche Darstellung immer existiert und dass sie eindeutig ist.

   (b) Betrachten Sie die Polynomfunktion $p(x) = x^2 - 2x - 1$ aus $\mathbb{Q}[x]$. Entwickeln Sie dieses Polynom an der Stelle $x_0 = 2$.

3. **Horner und Nullstellen** (4 Punkte) (Typo korrigiert: 30.04.)
   Welche ganzzahligen Werte kommen als Nullstellen x_0 für das Polynom

   $$12x^4 - 4x^3 - 6x^2 - x - 1$$

   in Frage.
   Spalten Sie sukzessive mit Hilfe des Horner-Schemas für jede Nullstelle x_0 den Linearfaktor $(x - x_0)$ ab und bestimmen Sie $p(x)$ in Produktdarstellung.

4. **Interpolation** (6 Punkte)

   (a) Finden Sie ein reelles Polynom möglichst geringen Grades, das die Messpunkte

   $$(0, -12), \quad (2, 16), \quad (5, 28)$$

   enthält. Welches Verfahren benutzen Sie?

   (b) Diskutieren Sie den Aufwand, der bei Verwendung des Lagrange- bzw. Newton-Verfahrens entsteht, will man die Menge der Stützstellen vergrößern.

   (c) Nehmen Sie zum Aufgabenteil (a) den Messpunkt $(7, -54)$ hinzu und geben Sie die neue Interpolation an.