Lösungen zum 9. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker II

(Maikel Nadolski)

1. **Konvergenz von Reihen**
   Untersuchen Sie die folgenden beiden Reihen auf Konvergenz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$$

Lösung. Zunächst zur ersten Reihe: Es gilt für jedes $n \geq 3$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{2^{n+1}}{n!} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \\ &\leq \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}. \end{aligned}$$

Weil $\sum_{n=3}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \infty$ gilt, folgt auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!} \leq \sum_{n=0}^{2} \frac{2^{n+1}}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \infty,$$

diese Reihe ist also konvergent. Nun zur zweiten Reihe: Es gilt für jedes $n \geq 3$

$$\frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}.$$

Analog zur ersten Reihe erhalten wir auch hier Konvergenz, da wir durch eine geometrische Reihe nach oben hin abschätzen können.

2. **Grenzwerte von Funktionen**
   Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, wenn diese existieren.

   a) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x - 6} - x$

   b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

   c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x}$

   d) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^3 + 3x^2 + x}{x^2 - 1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3-\sqrt{x}}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x^2}$

Lösung.

a) Dieser Grenzwert existiert, denn es gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x-6}-x &= \frac{x^2+x-6-x^2}{\sqrt{x^2+x-6}+x}\\ &= \frac{x-6}{\sqrt{x^2+x-6}+x}\\ &= \frac{1-\frac{6}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}+1}\\ &\to \frac{1}{2} \qquad \text{für } x\to\infty.\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\frac{x^2+x-2}{x^3+4x^2+4x} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x^2+x)} = \frac{x-1}{x^2+x}$$

Für $x\to -2$ gilt also $\frac{x^2+x-2}{x^3+4x^2+4x} \to -\frac{3}{2}$.

c) Wir formen um:

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2x} = \left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{2x} \to e^{-2} \qquad \text{für } x\to\infty$$

d) -1 ist eine Nullstelle des Nenners, aber keine des Zählers. Folglich divergiert die Funktion für $x\to -1^+$.

e) Hier existiert kein Grenzwert. Setzt man zum Beispiel die Nullfolge $a_n = \frac{1}{n}$ ein, so erhält man, $\frac{3-\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = 3n-\sqrt{n}$, eine Folge, die für $n\to\infty$ divergiert.

f) Es gilt

$$\frac{\sin 3x}{2x^2} = \frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2x}.$$

Weil $\frac{3}{2x}$ divergiert und $\frac{\sin 3x}{3x}$ konvergiert, divergiert die ursprüngliche Funktion für $x\to 0$.

3. **Zwischenwertsatz**
Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass es für abgeschlossene Intervalle $[a,b]\subset\mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $f:[a,b]\to[a,b]$ ein $c\in[a,b]$ gibt mit $f(c)=c$, also einen sogenannten Fixpunkt.

Beweis. Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - f(x). \end{aligned}$$

Nullstellen von g sind Fixpunkte von f. g ist stetig, weil es eine Addition von stetigen Funktionen ist. Ferner gilt $g(a) = a - f(a) \leq 0 \leq g(b) = b - f(b)$, weil $f(a), f(b) \in [a,b]$ gilt. Nach dem Zwischenwertsatz gibt somit ein $c \in [a,b]$ mit $g(c) = 0$, also mit $f(c) = c$. $\square$

4. **Nochmal O–Notation**
Sortieren Sie die folgenden Funktionen aufsteigend bezüglich ihres asymptotischen Wachstums und geben Sie kurze Begründungen:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 \;\; ; \; n^5 \;\; ; \; \log_2 n^n \;\; ; \; n\sqrt[4]{n} \;\; ; 2^{2\log_2 n}$$

Lösung.
Es gilt $\sum_{i=1}^{n} i^3 \in \Theta(n^4)$, daher auch $\sum_{i=1}^{n} i^3 \in o(n^5)$. Außerdem sind $\log_2 n^n = n \log_2 n$ und $2^{2log_2 n} = n^2$. Folglich erhalten wir die Reihenfolge

$$\log_2 n^n < n\sqrt[4]{n} < 2^{2\log_2 n} < \sum_{i=1}^{n} i^3 < n^5.$$