

Mathematik für Informatiker II

(Frank Hoffmann)

1. Rationale Zahlen

Zeigen Sie, dass für beliebiges $n > 1$ und eine Primzahl p die Zahl $\sqrt[n]{p}$ nicht rational ist.

Lösung Angenommen, $\sqrt[n]{p} = \frac{k}{l}$ ist rational. Dann ist $p \cdot l^n = k^n$. Wir betrachten die eindeutige Primzahlfaktorisation der Zahl k^n . Die Primzahl p tritt darin ein Vielfaches von n oft auf. In der Faktorisation von $p \cdot l^n$ kommt p ein Vielfaches von n plus 1 Mal oft vor. Widerspruch zur Eindeutigkeit der Faktorisation.

2. Infimum

Seien X und Y nichtleere und nach unten beschränkte Teilmengen der reellen Zahlen. Zeigen Sie:

- (a) $X \cup Y$ und $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ sind nichtleer und nach unten beschränkt.

Lösung: Nach Annahme $\exists x_0 \in X$ und $\exists y_0 \in Y$. Ebenso $\exists l_X, l_Y \forall x \in X, y \in Y : l_X \leq x \wedge l_Y \leq y$.

Wegen $x_0 \in X \cup Y$ und $x_0 + y_0 \in X + Y$ sind die Mengen nicht leer. Weiterhin $\forall z \in X \cup Y : l_X \leq z \vee l_Y \leq z$. Aber dann ist $\forall z \in X \cup Y : \min\{l_X, l_Y\} \leq z$. Ebenso $\forall x + y \in X + Y : l_X + l_Y \leq x + y$.

- (b) $\inf(X \cup Y) = \min\{\inf X, \inf Y\}$

Lösung: $\min\{\inf X, \inf Y\}$ ist wegen (a) untere Schranke für $X \cup Y$. Damit gilt $\min\{\inf X, \inf Y\} \leq \inf(X \cup Y)$, denn das Infimum ist nach Definition die größte untere Schranke. Angenommen $\min\{\inf X, \inf Y\} = \inf X$ und $\inf X < \inf(X \cup Y)$. Widerspruch, denn $\inf(X \cup Y)$ ist auch untere Schranke für X . Also gilt die Gleichheit.

- (c) $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$

Lösung: Wegen (a) ist $\inf X + \inf Y \leq \inf(X + Y)$. Angenommen, $\inf(X + Y) > \inf X + \inf Y$. Sei $\epsilon = \inf(X + Y) - \inf X - \inf Y$. Wir benutzen den Fakt, dass das Infimum einer Menge entweder zur Menge gehört oder es Elemente der Menge beliebig nahe am Infimum geben muss. Dass heißt,

$$\exists x_0 \in X \exists y_0 \in Y : (x_0 - \inf X < \frac{\epsilon}{2}) \wedge (y_0 - \inf Y < \frac{\epsilon}{2})$$

Daraus folgt aber, dass $x_0 + y_0 < \inf(X + Y)$. Widerspruch.

- (d) Falls $\inf X \notin X$, so hat X unendlich viele Elemente.

Lösung: Die Kontraposition lautet: Wenn X endlich viele Elemente hat, so ist $\inf X \in X$. Nach Annahme ist X nicht leer. Jede endliche nichtleere Menge reeller Zahlen hat ein Minimum und ein Minimum ist gleichzeitig Infimum.

3. Ungleichungen

- (a) Beweisen Sie für beliebige reelle Zahlen $x_1, \dots, x_n > -1$, die alle dasselbe Vorzeichen haben, die Ungleichung:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \dots + x_n$$

Ist die Voraussetzung über die Vorzeichen notwendig?

Lösung: Vollständige Induktion nach n .

Induktionsanfang: $n = 1$ Klar.

Induktionsschritt: Nehmen wir an, die Aussage gilt für n . Dann gilt sie auch für $n + 1$.

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n)(1 + x_{n+1}) &\geq (1 + x_1 + \dots + x_n)(1 + x_{n+1}) = \\ &= 1 + x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + x_1x_{n+1} + \dots + x_nx_{n+1} \geq 1 + x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + x_{n+1} \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, da alle Terme $x_i x_{n+1}$ wegen der Vorzeichenbedingung positiv sind.

Diese Bedingung ist notwendig, da z. Bsp. für $x_1 = 1/2, x_2 = -1/2$ die Aussage nicht stimmt.

- (b) Zeigen Sie für natürliche Zahlen $n > 2$:

$$n^{n+1} > (n + 1)^n$$

Lösung: Wir benutzen die Binomische Formel und zeigen:

$$n^{n+1} = n \cdot n^n > n^n + \binom{n}{1} n^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} n + 1$$

Die ersten $n - 1$ Summanden auf der rechten Seite sind jeweils $\leq n^n$. Weiterhin ist $\binom{n}{n-1} n + 1 = n^2 + 1 < n^n$ für $n > 2$. Addiert man diese Ungleichungen so erhält man die Behauptung.

4. Absolutes I

Beweisen Sie für beliebige reelle Zahlen die folgenden Ungleichungen.

- (a) $|x + x_1 + x_2 + \dots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)$

Lösung: Wir benutzen vollständige Induktion nach n :

Induktionsanfang: $n = 1$

Mit der Dreiecksungleichung:

$$|x| = |x + x_1 - x_1| \leq |x + x_1| + |-x_1| = |x + x_1| + |x_1|$$

Induktionsschritt: Es gelte $|x| \leq |x + x_1 + \dots + x_n| + |x_1| + \dots + |x_n|$ für beliebige n reelle Zahlen x_1, \dots, x_n .

Zu zeigen, daraus folgt für beliebige reelle Zahlen x_1, \dots, x_{n+1} :

$$|x| \leq |x + x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}| + |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{n+1}|$$

Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf die n Zahlen $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + x_{n+1}$ an:

$$|x| \stackrel{IV}{\leq} |x + x_1 + \dots + x_{n+1}| + |x_1| + \dots + |x_n + x_{n+1}|$$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir die Behauptung:

$$|x+x_1+\dots+(x_n+x_{n+1})|+|x_1|+\dots+(x_n+x_{n+1}) \leq |x+x_1+\dots+x_n+x_{n+1}|+|x_1|+\dots+|x_n|+|x_{n+1}|$$

(b) $|x - y| \geq ||x| - |y||$

Lösung: Wegen Dreiecksungleichung ist $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ und damit $|x| - |y| \leq |x - y|$. Analog $- (|x| - |y|) = |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$.

Das heißt aber: $||x| - |y|| \leq |x - y|$, was zu zeigen war.

5. **Absolutes II** Finden Sie die reellen Lösungen für folgende Ungleichungen!

(a) $|x| > |x + 1|$

Lösung: Wir benutzen den Trick, dass für reelle Zahlen $a, b \geq 0$ gilt: $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$.

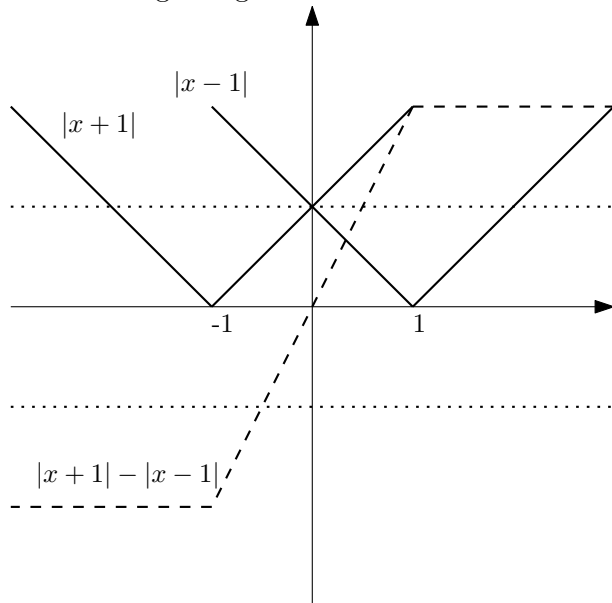
Da außerdem $|x|^2 = x^2$ gilt, folgt dass die Lösungsmenge unserer Ungleichung die Lösungsmenge von $x^2 > x^2 + 2x + 1$ ist und dies gilt für $x < -\frac{1}{2}$

(b) $||x + 1| - |x - 1|| < 1$

Lösung: Auch hier lohnt es sich, die linke Seite der Ungleichung etwas genauer anzuschauen. Ihr Wert ist für x und $-x$ derselbe, betrachten wir also $x \geq 0$. Für $x \geq 1$ ist die Ungleichung offensichtlich falsch.

Für $0 \leq x < 1$ ist $|x - 1| = 1 - x$. Damit ist $||x + 1| - |x - 1|| = 2x$.

Als Lösungsmenge erhalten wir also das offene Intervall $(-1/2, +1/2)$.



(c) $|x(1 - x)| < 1$

Lösung: Wir suchen also die Lösungsmenge L von

$$-1 < x(1 - x) < 1$$

Das ist der Durchschnitt der Lösungsmenge L_1 der Ungleichung $-1 < x - x^2$ und der Lösungsmenge L_2 von $x - x^2 < 1$. Bei $f(x) = x^2 - x + 1$ handelt es sich um eine nach oben offene Parabel ohne reelle Nullstellen, also $L_2 = \mathbb{R}$. Die Nullstellen von $g(x) = x^2 - x - 1$ sind $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und somit ist $L = L_1 = (x_1, x_2)$.