## 9. Übung — Mathematik für Informatiker II — SS 2011

Klaus Kriegel **Abgabe: 21.6.2011, 12:00 Uhr**

### Aufgabe 1 — $\mathcal{O}$–Notation — 6 **Punkte**

Ordnen Sie die folgenden Funktionsterme aufsteigend nach ihrem asymptotische Wachstum, d.h. wenn $f$ vor $g$ steht, muss $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ gelten. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung, aus der ersichtlich wird, welche Umformungen und Regeln angewendet wurden.

$$f_1(n) = \frac{(3n)^3}{n+1} \qquad f_2(n) = \log_2\left((n!)^3\right) \qquad f_3(n) = (\log_2 n)^{16}$$

$$f_4(n) = (\log_2 16)^{\log_2 n} \qquad f_5(n) = 8^{\log_2 n} \qquad f_6(n) = 8^{\log_3 n}$$

Markieren Sie alle Abschnitte der Ordnung, deren Funktionen das gleiche asymptotische Wachstum haben (d.h. $f(n) = \Theta(g(n))$ )

### Aufgabe 2 — stetige Ergänzugen — $2+2+2$ **Punkte**

Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen, welche Lücken sich Definitionsbereich ergeben, wenn man alle reellen Zahlen zu Grunde legt, und stellen Sie fest, welche dieser Lücken sich durch stetige Ergänzung beheben lassen.

a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln|x|}$ b) $g(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 2x}$ c) $h(x) = \dfrac{\tan x}{|x|}$

### Aufgabe 3 — Asymptoten — 4 **Punkte**

Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion $f(x)$ sowie das Verhalten der Funktion an ihren Polen:

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^3}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

### Aufgabe 4 — gleichmäßige Stetigkeit — $2+3$ **Punkte**

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}$ **nicht** gleichmäßig stetig ist.

Hinweis: Sie können z.B. argumentieren, dass es für $\epsilon = 1$ kein passendes $\delta > 0$ gibt, so dass …, d.h. sie müssen für ein beliebiges $\delta > 0$ zwei Stellen $x, x'$ finden, so dass ….

b) Zeigen Sie **anhand der Definition**, dass die Funktion $f(x) = x^3$ gleichmäßig stetig auf dem Intervall $[-10, 10]$ ist.

Hinweis: Wer den Zusammenhang zur Ableitung kennt und berücksichtigt, dass deren Betrag im Intervall $[-10, 10]$ durch 300 beschränkt ist, wird erkennen, dass man für ein beliebiges $\epsilon > 0$ der Wert $\frac{\epsilon}{300}$ als passendes $\delta > 0$ geeignet ist. Für eine direkte Begründung ist aber $\delta = \frac{\epsilon}{331} < 1$ noch besser geeignet.