

Aufgabe 1 **e -Grenzwerte****2+2+3+2 Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihren Lösungsweg (welche Grenzwertregeln und Konvergenzkriterien).

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{n+2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+2}\right)^{n+1}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n}\right)^{n+1}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n$

Aufgabe 2 **\mathcal{O} -Notation****6 Punkte**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr für alle Funktionen $f_1, f_2, g_1, g_2, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$? Begründen Sie positive Antworten anhand der Definitionen und negative Antworten durch geeignete Gegenbeispiele.

a) Aus $f_1(n) = o(g_1(n))$ und $f_2(n) = \Omega(g_2(n))$ folgt $g_1(n) \cdot f_2(n) = \omega(f_1(n) \cdot g_2(n))$ b) Aus $f_1(n) = \Omega(g(n))$ und $f_2(n) = \mathcal{O}(g(n))$ folgt $f_1(n) + f_2(n) = \Theta(g(n))$ c) Aus $f_1(n) = \Omega(g(n))$ und $f_2(n) = \mathcal{O}(g(n))$ folgt $f_1(n) \cdot f_2(n) = \Theta((g(n))^2)$ **Aufgabe 3****Laufzeiten in \mathcal{O} -Notation****3 + 3 Punkte**

Gegeben sei ein rekursiver Suchalgorithmus A , der auf einer Datenstruktur D (Suchraum) arbeitet. In jedem Rekursionsschritt wird der Suchraum um mindestens ein Viertel, aber höchstens die Hälfte, verkleinert (also eine Größe m auf m' mit $m/2 \leq m' \leq 3m/4$ reduziert). Jeder Rekursionsaufruf braucht konstante Zeit. Darin sind auch die Kosten zur Reduktion des Suchraums enthalten. Ein Suchprozess beginnt auf dem Gesamtsuchraum D der Größe n und endet, wenn der Suchraum leer oder einelementig ist.

a) Analysieren Sie die Laufzeit $T(n)$ von A im Worst-Case-Verhalten. Das Ergebnis sollte die Form $T(n) = \Theta(\dots)$ haben.b) Welche Laufzeit ergibt sich, wenn die Zeit zur Bearbeitung eines Rekursionsaufrufs bei der Anwendung auf einen Suchraum der aktuellen Größe m jeweils durch $\Theta(\log_2 m)$ gegeben ist.