7. Übung — Mathematik für Informatiker II — SS 2011

Klaus Kriegel **Abgabe: 7.6.2011, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1 — **Konvergenz** — **2+4 Punkte**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a und sei

$$b_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \qquad \text{sowie} \qquad c_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^+$$

Zeigen Sie anhand der Grenzwertdefinition, dass die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ auch gegen den Grenzwert a konvergieren.

Hinweis: Bei der Suche nach einem geeigneten $n_0(\epsilon)$ für (b_n) kann das entsprechende $n_0(\epsilon)$ von (a_n) verwendet werden, für (c_n) reicht das nicht aus.

Aufgabe 2 — **Konvergenz und bestimmte Divergenz** — **4 Punkte**

Begründen Sie die folgenden Fakten anhand der Definitionen von Konvergenz und bestimmter Divergenz:

a) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, dann gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, dann gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

Aufgabe 3 — **Grenzwertsätze** — $2+3+3$ **Punkte**

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\geq 3}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie (soweit das möglich ist) die Grenzwerte. Vergessen Sie nicht, Ihren Lösungsweg zu kommentieren (welche Grenzwertregeln).

a) $a_n = \sqrt{2n - \frac{2n^3+1}{(n+3)(n+2)}}$ b) $b_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}$

c) $c_n = \frac{n^2+(-1)^n\cdot n}{(n+1)} - \frac{n^2}{n+2}$

Hinweis: Man kann zeigen, dass eine Folge unbestimmt divergiert, indem man zwei konvergente Teilfolgen mit verschiedenenen Grenzwerten findet.

Aufgabe 4 — **Grenzwert $\sqrt[n]{n}$** — $2+2$ **Punkte**

Verwenden Sie den Grenzwert von $\sqrt[n]{n}$ und das Vergleichskriterium, um die folgenden Grenzwerte nachzuweisen bzw. zu bestimmen.

a) Für jedes $a > 0$ hat die Folge $a_n = \sqrt[n]{a}$ den Grenzwert 1.
Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung $a \geq 1$ und $a < 1$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (6n)^{-\frac{1}{3n}}$.