Mathematik für Informatiker II **SS 2011**

6. Übung **Abgabe 31.05.2011, 12 Uhr**

Aufgabe 1 **Einheitswurzeln** 8 **Punkte**

Bezeichne $\zeta_{n,k}$, $0 \leq k < n$, die komplexe Einheitswurzel $e^{i2k\pi/n}$. Beweisen Sie:

a) $\forall n > 0, j \geq 0, d > 0 \;\; \zeta_{dn,1}^{dj} = \zeta_{n,1}^{j}$

b) Für gerades $n > 0$ gilt: $\zeta_{n,1}^{n/2} = -1$

c) Für gerades $n > 0$: $\{\zeta_{n,0}^2, \ldots, \zeta_{n,n-1}^2\} = \{\zeta_{n/2,0}, \ldots, \zeta_{n/2,n/2-1}\}$

d) Für $n > 0$ und positives ganzes $k < n$ gilt: $\sum_{j=0}^{n-1}(\zeta_{n,k})^j = 0$

Aufgabe 2 **Polynominterpolation** $2 + 2$ **Punkte**

a) Bestimmen Sie ein reelles Polynom vom Grad ≤ 3 mit den folgenden Stützstellen:

$$p(-2) = -3 \qquad p(-1) = 8 \qquad p(1) = 6 \qquad p(2) = 17$$

b) Gibt es ein Polynom vom Grad ≤ 3 mit den Stützstellen aus a) und der zusätzlichen Stützstelle $p(-3) = -45$ bzw. $p(-3) = -38$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 **Gerade Polynome** $3 + 3$ **Punkte**

Wir nennen ein reelles Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein gerades (bzw. ungerades) Polynom, wenn für alle ungeraden (bzw. für alle geraden) Werte von k die Koeffizienten a_k gleich Null sind, z.B. ist $x^4 + 3x^2 - 6$ ein gerades und $x^5 - 4x$ ein ungerades Polynom. Jedes Polynom $p(x)$ kann eindeutig als Summe aus einem geraden Polynom $g(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} x^{2j}$ und einem ungeraden Polynom $u(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} x^{2j+1}$ dargestellt werden.

a) Zeigen Sie, dass für ein gerades (bzw. für ein ungerades) Polynom $p(x)$ an jeder Stelle $r \in \mathbb{R}$ die Identität $p(-r) = p(r)$ (bzw. die Identität $p(-r) = -p(r)$) gilt.

b) Beweisen Sie, dass auch die Umkehrung gilt: Erfüllt ein Polynom $p(x)$ die Identität $p(-r) = p(r)$ für alle $r \in \mathbb{R}$, dann ist $p(x)$ ein gerades Polynom.
Hinweis: Zum Beispiel Widerspruchsbeweis mit obiger Summenzerlegung.

Aufgabe 4 **Grenzwerte** 2 **Punkte**

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^2 - 4n}{2n + 1} - \frac{2n^2 + 5}{n + 3}$$