

Aufgabe 1**Extremwerte****5 Punkte**

Zwei Autos A_1 und A_2 fahren auf zwei Straßen, die sich im Winkel von $\pi/6$ (also 30°) kreuzen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ passiert das Auto A_1 gerade die Kreuzung, das Auto A_2 hat die Kreuzung bereits passiert und befindet sich 600 m weiter. Auto A_2 fährt mit konstanter Geschwindigkeit von $v_2 = 20\text{ m/s}$, während sich A_1 fast doppelt so schnell, nämlich mit $v_1 = 20\sqrt{3}\text{ m/s}$, auf der anderen Straße bewegt. Zu welchem Zeitpunkt ist die Entfernung zwischen beiden Fahrzeugen minimal und wie groß ist diese minimale Entfernung?

Hinweis: Betrachten Sie die Kreuzung als Ursprung des Koordinatensystems, die Straße von A_2 als x -Achse und beschreiben Sie dann die Positionen $P_1(t)$ bzw. $P_2(t)$ von A_1 bzw. A_2 zu einer Zeit t durch die Koordinaten. Die $\sqrt{3}$ in v_2 sollte nicht stören, sondern das Rechnen eher vereinfachen!

Aufgabe 2**Regel von Bernoulli-L'Hospital****2 + 2 + 2 Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2e^{-x^2} - 3}{x^2} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{\cot x} \right) \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$$

Aufgabe 3**Regel von Bernoulli-L'Hospital****3 Punkte**

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jedes Polynom $p(x)$ der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{\sqrt{e^x}}$ gleich 0 ist.

Aufgabe 4**Ableitung von Polynomen****3 + 3 Punkte**

a) Nutzen Sie den Mittelwertsatz, um Folgendes zu zeigen: Sei $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ein Polynom vom Grad n (d.h. $a_n \neq 0$), das n verschiedene reelle Nullstellen hat. Dann liegt jede Stelle, an der $p(x)$ ein lokales Extremum hat, zwischen der kleinsten und der größten Nullstelle des Polynoms.

b) Zeigen Sie, dass eine Stelle x_0 , an der ein Polynom $p(x)$ vom Grad $n \geq 2$ sowohl eine Nullstelle als auch ein lokales Extremum hat, mindestens eine doppelte Nullstelle von $p(x)$ sein muss.