Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 Ableitung einer differenzierbaren Funktion

Die Ableitung einer Funktion ist der zentrale Begriff der Differentialrechnung. Diese Theorie wurde unabhängig voneinander von Leibniz und Newton begründet. Man kann die Ableitung geometrisch, analytisch und physikalisch interpretieren und sich auf diesem Weg vielfältige Anwendungen sowohl in der reinen Mathematik als auch in den Naturwissenschaften erschließen.

Definition: Sei eine Funktion f auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert und $x_0 \in I$. Die Funktion f nennt man *differenzierbar* oder *ableitbar* im Punkt x_0 wenn der sogenannte *Differenzenquotient*

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

für $x \to x_0$ bzw. $h \to 0$ einen (endlichen!) Grenzwert hat, welcher dann mit $f'(x_0)$ bezeichnet wird. Ist f in allen Punkten aus I differenzierbar, wird die Zuordnung $x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f genannt. Alternative Bezeichnungen für die Ableitung $f'(x)$ sind $f(x)'$, $\frac{df(x)}{dx}$ und $\frac{d}{dx}f(x)$. Den Kern dieser Definition kann man in der folgenden Formel zusammenfassen:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Satz: Ist eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ in einen Punkt $x_0 \in I$ ableitbar, dann ist sie auch stetig in x_0.

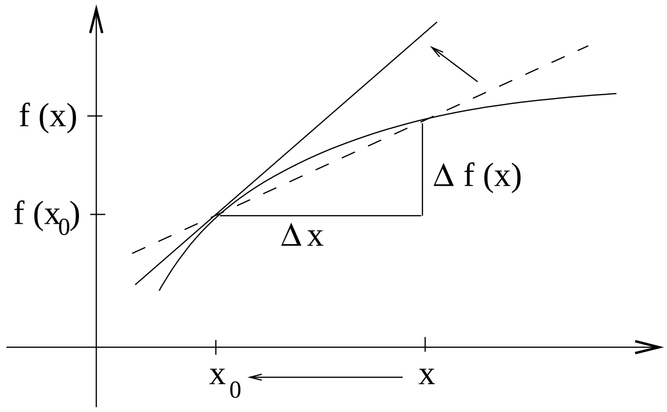
Beweis: Zu zeigen ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ oder äquivalent dazu $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Durch Erweitern mit $(x - x_0)$ kann man diesen zweiten Grenzwert auf die Ableitung zurückführen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot 0 = 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

Achtung: Stetigkeit ist keine hinreichende Voraussetzung für die Differenzierbarkeit. Davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ betrachtet. Offensichtlich ist f überall stetig, aber für $x_0 = 0$ hat der Differenzenquotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ den linksseitigen Grenzwert -1 und den rechtsseitigen Grenzwert 1, es gibt also keinen Grenzwert und damit keine Ableitung in diesem Punkt. Die folgende geometrische Interpretation der Ableitung gibt eine etwas anschaulichere Erklärung für dieses Verhalten.

Geometrische Deutung der Ableitung

Ist eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ in einen Punkt $x_0 \in I$ ableitbar, dann kann man an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ eindeutig eine Tangente an den Funktionsgraphen von f anlegen und die Ableitung $f'(x_0)$ repräsentiert den Anstieg dieser Tangente. Diese Interpretation resultiert aus der Tatsache, das für jedes $x \neq x_0$ der Differenzenquotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ den Anstieg der Gerade durch die zwei Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ (in der Abbildung gestrichelt) beschreibt. Diese Gerade ist eine Sekante des Funktionsgraphs und durch die Grenzwertbildung $x \to x_0$ wird die Sekante zur Tangente und der Differenzenquotient geht gegen die Ableitung $f'(x_0)$.



Analytische Deutung der Ableitung

Man kann mit Hilfe der Ableitung $f'(x_0)$ das Verhalten der Funktion in einer (kleinen) Umgebung von x_0 approximieren:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$

Diese Approximation wäre eine Identität, wenn man an Stelle von $f'(x_0)$ den Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ einsetzen würde. Da $f'(x_0)$ der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to x_0$ ist, gilt diese Approximation in einer Umgebung von x_0.

Physikalische Deutung der Ableitung

In der Physik wird die Ableitung einer in der Zeit veränderlichen Größe häufig zur Beschreibung einer neuen physikalischen Größe verwendet. Betrachtet man beispielsweise den von einem fallenden Gegenstand zurückgelegten Weg $s(t)$ als eine von der Fallzeit t abhängigen Größe, dann beschreibt der Differenzenquotienten $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten t_0 und t und folglich charakterisiert die Ableitung $f'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

Beispiele: Die Ableitungen einiger Standardfunktionen können direkt an Hand der Definition bestimmt werden:

1) Die Ableitung einer konstanten Funktion $f(x) = c$ ist $f'(x) = 0$ und die Ableitung der identischen Funktion $g(x) = x$ ist $g'(x) = 1$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

2) Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
Man kann das mit Induktion über n und der Produktregel (nächster Satz) beweisen, aber auch mit dem folgenden direkten Argument unter Verwendung des Binomischen Satzes:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i}h^i\right) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + n\cdot x^{n-1}h + \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} x^{n-i}h^i - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[n\cdot x^{n-1} + h \cdot \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} x^{n-i}h^{i-2} \right] \\
&= n\cdot x^{n-1} + 0 = n \cdot x^{n-1}
\end{aligned}$$

3) Die Ableitung der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})h} == \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4) Zur Ableitung der Sinusfunktion verwendet man das Additionstheorem sowie die Grenzwerte $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ und $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ (kleine Übung):

$$\begin{aligned}
\sin' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - sinx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos x - sinx}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \\
&= (\sin x)\cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x
\end{aligned}$$

Um die Ableitungen von weiteren Funktionen zu bestimmen, verwendet man vor allem die folgenden zwei Sätze.

Satz (Differentiationsregeln): Sei I ein offenes Interavll, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf I und $c \in \mathbb{R}$, dann sind auch die folgenden Verknüpfungen von f und g differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
[f(x) + g(x)]' &= f'(x) + g'(x) \\
[c \cdot f(x)]' &= c \cdot f'(x) \\
[f(x) \cdot g(x)]' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{für alle } x \in I \text{ mit } g(x) \neq 0
\end{aligned}$$

Beweis: Die Herleitung der ersten zwei Regeln ist trivial, für die Produktregel reicht ein einfacher Trick, mit den eine additive Null eingeschoben wird, und die Nutzung der Stetigkeit von g:

$$\begin{aligned}
[f(x)\cdot g(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Quotientenregel beweist man $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = \frac{g'(x)}{(g(x))^2}$ durch:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)} = \frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

und wendet dann die Produktregel auf $\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]'$ an. □

Satz (Kettenregel): Seien $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, so dass g in $x_0 \in I$ und f in $g(x_0) \in I'$ differenzierbar sind, dann ist die verkettete Funktion $fg(x) = f(g(x))$ differenzierbar in x_0 und es gilt $(fg)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Beweis: Die alternative Formulierung dieses Satzes lautet

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} \qquad \text{wobei man } z = g(x) \text{ setzt.}$$

Darin ist bereits die Beweisidee enthalten: Ein einfaches Kürzen des Differentials dz - wie diese Formel suggeriert - ist nicht korrekt, aber wenn man diese Idde des Kürzens auf die Differenzenquotienten überträgt und die Stetigkeit der Funktion g beachtet, ergibt sich ein Beweis des Satzes.

$$\lim_{h\to 0}\frac{fg(x_0+h)-fg(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(fg(x_0+h)-fg(x_0))\cdot(g(x_0+h)-g(x_0))}{(g(x_0+h)-g(x_0)) \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad h} = f'(g(x_0))g'(x)$$

Anwendungen: 1) Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^{\frac{3}{2}} = x\cdot\sqrt{x}$ kann man mit der Produktregel bestimmen:

$$f'(x) = 1\cdot\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

2) Die Ableitung der Cosinusfunktion kann man mit Hilfe der Kettenregel auf die Ableitung der Sinusfunktion zurückführen. Wegen $\cos x = \sin x + \frac{\pi}{2}$ setzt man $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$ und $f(y) = \sin y$:

$$\cos' x = (\sin'(x+\frac{\pi}{2}))\cdot 1 = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

3) Mit der Quotientenregel kann man jetzt die Ableitungen von Tangens und Cotangens ausrechenen:

$$\tan' x = \frac{\cos\,\cdot\cos\, - sinx\cdot(-\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

und analog $cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Höhere Ableitungen

Ist eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar über I, dan kann man auch die Ableitung $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit untersuchen. Wenn die Ableitung der Ableitung existiert, nennt man das die zweite Ableitung von f und kann diesen Prozess so lange wiederholen, wie die Ableitung der k-ten Ableitung existiert. Für diese höheren Ableitungen werden die folgenden Notationen verwendet:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &:= f(x)\\
f^{(1)}(x) = f'(x) &:= \frac{d}{dx}f(x)\\
f^{(2)}(x) = f''(x) &:= \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)\\
f^{(k)}(x) &:= \frac{d}{dx}f^{(k-1)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}f(x)
\end{aligned}$$

4.2 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Definition: Sie $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf einem Bereich $D \subseteq \mathbb{R}$ definiert ist.

- f hat im Punkt $x_0 \in D$ ein *globales Maximum* (bzw. *globales Minimum*), falls für alle $x \in D$ die Ungleichung $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) erfüllt ist.
- f hat im Punkt $x_0 \in D$ ein *lokales Maximum* (bzw. *lokales Minimum*), falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| \leq \varepsilon$ die Ungleichung $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) erfüllt ist.
- Man verwendet den Begriff *Extremstelle* als Oberbegriff für lokales Minimum und lokales Maximum.

Satz: Sei f eine auf einem offenen Intervall I differenzierbare Funktion, und $x_0 \in I$ eine lokale Extremstelle, dann ist $f'(x_0) = 0$.

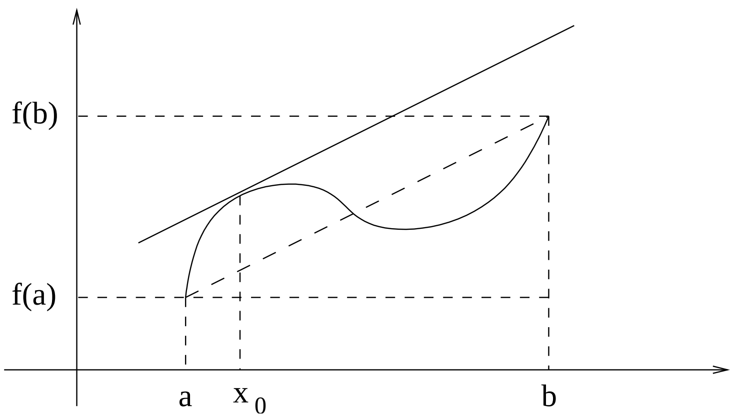
Beweis: Angenommen, f hat in x_0 ein lokales Maximum und $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$. Dann ist $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ für alle $|h| < \varepsilon$.
Da f in x_0 differenzierbar ist, existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für $h \to 0$. Da der Zähler des Differenzenquotienten für kleine Werte von h nicht positiv werden kann, entstehen bei der Betrachtung des linksseitigen bzw. rechtsseitigen Grenzwerts ($h \to 0-$ bzw. $h \to 0+$) immer Werte ≥ 0 (bzw. ≤ 0). Da aber links- und rechtsseitiger Grenzwert gleich sein müssen, ergibt sich

$$0 \leq lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

Der Beweis für lokale Minima ist analog, mit dem einzigen Unterschied, dass der Zähler des Differenzenquotienten für kleine Werte von h nicht negativ werden kann. $\square$

Mittelwertsatz: Sei $f : [ab] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) ist, dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$, so dass der Anstieg der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ mit dem durchschnittlichen Anstieg der Funktion im Interval $[a, b]$ übereinstimmt, d.h.

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Beweis: Wir beweisen zuerst einen Spezialfall - auch als Satz von Rolle bekannt - bei dem $f(a) = f(b)$ vorausgesetzt wird. In diesem Fall ist $f(b) - f(a) = 0$ und folglich muss ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$ gefunden werden. Als stetige Funktion auf $[a, b]$ muss die Funktion f ein globales Maximum M und ein globales Minimum m annehmen. Es reicht aus zu wissen, dass eine dieser Extremstellen im Inneren des Intervalls liegt. Dazu betrachten wir die folgenden drei Situationen:

1. Ist $M = m$, dann ist die Funktion f konstant auf $[a, b]$ und damit ist die Ableitung an jeder Stelle gleich 0.

2. Ist $M > f(a)$, dann gibt es einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = M$ und folglich $f'(x_0) = 0$.

3. In allen noch nicht gelösten Situationen ist $m < M = f(a) = f(b)$, d.h. jede Stelle x_0, an der f den Wert m annimmt, liegt im Inneren des Intervalls und $f'(x_0) = 0$.

Zum Abschluss wird der allgemeine Fall auf den gelösten Spezialfall zurückgeführt. Dazu definiert man die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) - (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Offensichtlich ist h stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und $h(a) = f(a) = h(b)$ und damit existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $h'(x_0) = 0$. Die Behauptung für f folgt dann aus $(x - a)' = 1$ durch einfaches Umstellen der Gleichung:

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \square$$

Folgerung 1: Für eine auf einem offenen Intervall differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{array}{lcl} f'(x) > 0 \text{ auf I} & \Longrightarrow & f \text{ ist streng monoton wachsend} \\ f'(x) < 0 \text{ auf I} & \Longrightarrow & f \text{ ist streng monoton fallend} \\ f'(x) \geq 0 \text{ auf I} & \Longrightarrow & f \text{ ist monoton wachsend} \\ f'(x) \leq 0 \text{ auf I} & \Longrightarrow & f \text{ ist monoton fallend} \\ f'(x) = 0 \text{ auf I} & \Longrightarrow & f \text{ ist konstant} \end{array}$$

Beweis: Alle Behautungen kann man mit einem indirekten Ansatz aus dem Mittelwertsatz ableiten. Für den ersten Punkt nimmt man an, dass f nicht streng monoton wachsend wäre, d.h. zwei Werte $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f(a) \geq f(b)$ existieren. Dann gibt es nach Mittelwertsatz ein $x_0 \in (a, b) \subseteq I$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$, was einen Widerspruch zur Voraussetzung ist. Alle anderen Punkte werden analog bewiesen.

Folgerung 2: Für zwei auf einem offenen Intervall differenzierbare Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = g'(x)$ auf I gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in I$.
Beweis: $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \text{auf } I \quad \Longrightarrow \quad f(x) - g(x) \quad \text{ist konstant.}$

Stationäre Punkte und lokale Extrema

Definition: Nullstellen der ersten Ableitung $f'(x)$ werden *stationäre Punkte* von f genannt.

Wie bereits bewiesen, ist jede lokale Extremstelle auch ein stationärer Punkt. Es stellt sich die Frage, wann an einem stationären Punkt ein lokales Extremum liegt. Die nachfolgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen für lokale Extrema ergeben sich unmittelbar aus Folgerung 1.

- Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum an der Stelle x_0:
  $f'(x_0) = 0$, d.h. x_0 ist stationärer Punkt.

- Hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum an der Stelle x_0:
  f ist streng monoton wachsend in einer Umgebung links von x_0 **und** streng monoton fallend in einer Umgebung rechts von x. Damit ist es hinreichend, wenn links von x_0 die Bedingung $f'(x) > 0$ und rechts von x_0 die Bedingung $f'(x) < 0$ erfüllt ist.

- Hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum an der Stelle x_0:
  $f'(x_0) = 0$ und $f''(x) < 0$ in einer Umgebung von x_0

- Hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum an der Stelle x_0:
  $f'(x_0) = 0$ und $f''(x) > 0$ in einer Umgebung von x_0

Krümmung von Kurven

Definition: Die Krümmung der Funktionskurve einer zweifach differenzierbaren Funktion wird durch die zweite Ableitung beschrieben. Die Kurve ist an der Stelle x_0 *linksgekrümmt* (oder *konvex von unten*), wenn $f''(x_0) > 0$, und sie ist *rechtsgekrümmt* (oder *konvex von oben*), wenn $f''(x_0) < 0$.
Die Funktion f hat an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt* wenn an dieser Stelle eine Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung übergeht, oder umgekehrt.

- Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt an der Stelle x_0: $f''(x) = 0$.

- Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt an der Stelle x_0: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz): Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) sowie $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$). Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis: Wegen $g'(x) \neq 0$ ist g entweder streng monoton wachsend oder fallend und folglich $g(a) \neq g(b)$. Wir definieren eine Hilfsfunktion

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

für die offensichtlich $F(a) = \frac{f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a)}{g(b) - g(a)} = F(b)$ gilt und verwenden den Mittelwertsatz für F:

$$\exists x_0 \in (a, b)) \quad F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{f' x_0}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Satz (Regel von Bernoulli-L'Hospital): Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, welche die folgenden Voraussetungen erfüllen:

- f und g sind differenzierbar auf (a, b) und $g'(x) \neq 0$ auf (a, b)

- $\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = \infty$

- $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Dann ist:

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Analoge Aussagen gelten für die rechtsseitigen Grenzwerte mit $x \to a+$ bzw. für beidseitige Grenzwerte, wenn eine Stelle in Inneren des Intervalls betrachtet wird.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall $\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0$ und bilden mit $f(b) = g(b) := 0$ eine stetige Erweiterung der Funktionen auf $(a, b]$. Nun kann für jedes

$x \in (a,b)$ der verallgemeinerten Mittelwertsatz auf f und g im Intervall $[x,b]$ angewendet werden und wir erhalten:

$$\exists x_0 \in (x,b) \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Da das zu einem x gehörende x_0 immer zwischen x und b liegt, folgt bei Grenzwertenbetrachtungen mit $x \to b-$ auch immer $x_0 \to b-$ und damit

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0\to b-} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = c$$

Wie das folgende Beispiel zeigt, sind viele Anwendungen dieser Regel nicht ganz offensichtlich und ergeben sich erst nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-\cos x}\right) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\overbrace{1-\cos x - x}^{f(x)}}{\underbrace{x\cdot(1-\cos x)}_{g(x)}} = \lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x - 1}{(1-\cos x) + x\cdot \sin x} = -\infty\end{aligned}$$

4.3 Ableitung von Umkehrfunktionen

Wie allgemein über Funktionen bekannt ist, hat eine Funktion $f: A \longrightarrow B$ genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie bijektiv, also injektiv **und** surjektiv ist. In diesem Fall ist die Umkehrfunktion $g = f^{-1}: B \longrightarrow A$ eindeutig durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

$$fg = Id_B \quad \text{und} \quad gf = Id_A \quad \text{d.h.} \quad f(g(x)) = x \text{ für alle } x \in B \text{ und } g(f(x)) = x \text{ für alle } x \in A$$

Dabei ist die Eigenschaft $fg = Id_B$ äquivalent zur Surjektivität und die Eigenschaft $gf = Id_A$ äquivalent zur Injektivität von f.
Man kann jede Funktion als surjektive Funktion auffassen, indem man den Wertebereich auf das tatsächliche Bild des Definitionbereichs einschränkt, z.B. den Wertebereich der Sinusfunktion von $\mathbb{R}$ auf $[-1,1]$. Im Gegensatz dazu muss man, um eine Funktion injektiv zu machen, den Definitionsbereich einschränken und verliert dadurch einen echten Teil der Funktion. Zum Beispiel müßte man den Definitionsbereich einer konstanten Funktion auf einen einzigen Punkt einschränken. Für viele Funktionen, insbesondere die Winkelfunktionen, sind solche Einschränkungen des Definitionsbereichs aber sehr sinnvoll und führen zur Einführung von Umkehrfunktionen.

Definition: Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Man nennt f ist umkehrbar auf $D' \subseteq D$, falls die eingeschränkte Funktion

$$f|_{D'} : D' \longrightarrow f(D') = \operatorname{Im}(f|_{D'})$$

bijektiv ist.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = x^2$ ist auf ihrem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ nicht injektiv. Diese Funktion ist aber umkehrbar auf $\mathbb{R}^{\geq 0} = [0,\infty)$, denn die Funktion $f|_{\mathbb{R}^{\geq 0}} : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist bijektiv und hat die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
Die Funktion $f(x) = x^2$ ist aber auch über $\mathbb{R}^{\leq 0} = (-\infty, 0]$ umkehrbar, wobei man die Umkehrfunktion durch $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ beschreiben kann.

Es ist bekannt, dass für umkehrbare Funktionen f die Graphen der Funktion f und der Umkehrfunktion f^{-1} zueinander gespiegelt sind an der Geraden $y = x$.
Für stetige Funktionen über einem Intervall ist Umkehrbarkeit äquivalent zur Eigenschaft streng monoton wachsend oder streng monoton fallend zu sein. Der folgende Satz stellt diese Eigenschaften in einen Zusammenhang mit der Differenzierbarkeit der Funktion f und ihrer Umkehrfunktion.

Satz: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf einem Intervall I differenzierbar ist, wobei zusätzlich $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ vorausgesetzt wird. Dann ist f umkehrbar über I. Die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ ist in allen $x \in f(I)$ differenzierbar und es gilt $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

Beweis:

$$\frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\lim\limits_{y \to g(x)} \frac{f(y)-f(g(x))}{y-g(x)}}$$

g stetig, $x' \to x$, dann $g(x') \to g(x)$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x' \to x} \frac{f(g(x'))-f(g(x))}{g(x')-g(x)}}$$

g ist Umkehrfunktion von f, also $fg = \mathrm{Id}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\lim\limits_{x' \to x} \frac{x'-x}{g(x')-g(x)}} \\ &= \lim_{x' \to x} \frac{g(x') - g(x)}{x' - x} \\ &= g'(x) \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $f(x) = x^3$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, f ist streng monoton wachsend, also ist f umkehrbar. Bekanntlich nennt man die Umkehrfunktion die dritte Wurzel aus x und durch Anwendung des Satzes erhält man die Ableitung dieser Wurzelfunktion:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x} = f(x^{1/3}) \\ \left(\sqrt[3]{x}\right)' &= \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

2. Etwas allgemeiner können wir beliebige ganzzahlige Potenzen von x betrachten und dabei zwei Fälle unterscheiden:
   $f(x) = x^n$, n gerade, f ist umkehrbar über $\mathbb{R}^+$ oder
   $f(x) = x^n$, n ungerade, f ist umkehrbar über $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \\ \left(\sqrt[n]{x}\right)' &= \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{-n+1}{n}} \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Kettenregel kann man jetzt auch die Ableitung für beliebige rationale Potenzen von x bilden. Zur Erinnerung beginnen wir mit der Definition:
$f_\alpha(x) = x^\alpha$ mit $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $n > 0$

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \left(\sqrt[n]{x}\right)^m & \text{falls } m > 0 \\ 1 & \text{falls } m = 0 \\ \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{-m}} & \text{falls } m < 0 \end{cases}$$

Um die Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden Wurzeln zu vermeiden, wird $\mathbb{R}^+$ als einheitlicher Definitionsbereich festgelegt. Jetzt kann die Kettenregel angewendet werden:

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= m \cdot \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n \cdot \left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{m}{n} \cdot \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m-1-(n-1)} \\ &= \frac{m}{n} \cdot \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m-n} \\ &= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}} \\ &= \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

3. Winkelfunktionen Die Funktion $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ist umkehrbar auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, da die Ableitung $\cos x$ in diesem Bereich ≥ 0 ist (also ist sin monoton steigend).
   Umkehrfunktion: $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (0-ter Zweig von arcsin)
   Der 1. Zweig wäre z.B. die Umkehrung von sin auf $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

   Ableitung der Umkehrfunktion:
   Aus $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ folgt, dass in diesem Bereich $\cos(\arcsin x) \geq 0$ gilt.
   Deshalb kann die Identität $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ für $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ aufgelöst werden. Jetzt wird wieder der Satz angewendet:

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

   Analog ist die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ umkehrbar auf $[0, \pi]$. Für die Umkehrfunktion: $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ gilt:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

   Die Funktion $\tan : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \to (-\infty, +\infty)$ ist umkehrbar auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Das kann man dadurch begründen, dass die Tangensfunktion ist auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ differenzierbar ist und die Ableitung $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ überall positiv ist. Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist folglich auch auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Die Ableitung von $\arctan x$ bestimmt man auf die folgende Weise:

$$\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\
&= \frac{1}{\frac{sin^2(\arctan x)+\cos^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} \\
&= \frac{1}{\tan^2(\arctan x)+1} \\
&= \frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich für die Umkehrfunktion $\text{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{x^2+1}$$

4. Für die Exponentialfunktion $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ muss zuerst die Ableitung bestimmt werden. Hier ist die Grundidee dazu:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} exp(x) &= \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\
&\stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\right] \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \frac{e^x}{1} \\
&= e^x
\end{aligned}$$

Die mit Fragezeichen versehene Gleichheit ist kein korrekter Schritt, denn allgemein kann man Grenzwertbildung und Ableitung nicht vertauschen. Eine genaue Begründung dafür, dass die Ableitung von e^x wieder e^x ist, erfolgt mit dem Mittelwertsatz.

Da die Ableitung der Exponentialfunktion überall positive Werte hat, ist die Exponentialfunktion selbst streng monoton wachsend und folglich umkehrbar über $\mathbb{R}$.

Für die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ergibt sich nach unserer Regel die folgende Ableitung:

$$\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$