Aufgabe 1: **Polynome und komplexe Zahlen** **7 + 3 Punkte**

a) Das Polynom $p(x) = x^5 + \sqrt{3}\,x^4 + 24\sqrt{3}\,x^2 + 72\,x$ hat bei $x = -\sqrt{3}$ eine Nullstelle. Bestimmen Sie alle anderen Nullstellen (reelle **und** komplexe) dieses Polynoms und stellen Sie diese auch in kartesischen Koordinaten dar.
Hinweis: An einer Stelle kann die Zerlegung einer ganzen Zahl in ihre Primfaktoren sehr hilfreich sein.

b) Bestimmen Sie eine komplexe Zahl z mit den folgenden drei Eigenschaften:

$$|z| = \sqrt{20} \qquad \frac{Re(z)}{Im(z)} = 2 \qquad Re(z) < Im(z)$$

a) Da auch $x_1 = 0$ eine Nullstelle von $p(x)$ ist, haben wir

$p(x) = x \cdot (x^4 + \sqrt{3}\,x^3 + 24\sqrt{3}\,x^2 + 72)$

Weiter mit Polynomdivision für $x_2 = -\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} &(x^4 + \sqrt{3}\,x^3 + 24\sqrt{3}\,x + 72) : (x + \sqrt{3}) = x^3 + 24\sqrt{3} \\ &-(x^4 + \sqrt{3}\,x^3) \\ &\quad 0 \quad -(24\sqrt{3}\,x + 24 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) \\ &\qquad\qquad 0 \end{aligned}$$

Weitere Nullstellen $\quad x^3 + 24\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x^3 = -24\sqrt{3}$

$x_{3,4,5} = \sqrt[3]{-24\sqrt{3}} = \sqrt[3]{8 \cdot \sqrt{3}^3 \cdot e^{i\pi}}$

$x_3 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} + 3i$

$x_4 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = -2 \cdot \sqrt{3}$

$x_5 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{3} - 3i$

b) Sei $x = Re(z)$ und $y = Im(z)$

$\frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y \qquad \sqrt{20} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2y)^2 + y^2} \quad |\,(\,)^2$

$\Rightarrow 20 = 5y^2 \Rightarrow y^2 = 4$

Fall 1: $y = 2 \Rightarrow x = 4$ Widerspruch zu $x < y$

Fall 2: $y = -2 \Rightarrow x = -4$ ok. $\Rightarrow z = -4 - 2i$

Aufgabe 2: **Konvergenz** **4 + 3 Punkte + 3 Zusatzpunkte**

a) Bestimmen Sie den Funktionengrenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-e^{-x})}{1-\cos x}$ und machen Sie deutlich, an welcher Stelle Sie welche Grenzwertregeln verwenden!

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-2)^k \cdot \dfrac{x^k}{k}$ (kurze Begründung!).

c) **Zusatzaufgabe:** Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe aus Teil b.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x(1-e^{-x})}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^{-x})+x e^{-x}}{\sin x}$$ Bernoulli L'Hospital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}+e^{-x}-x e^{-x}}{\cos x}$$ — " —

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} (e^{-x}+e^{-x}-x e^{-x})}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x}$$ Quotientenregel

$$= \frac{1+1-0}{1} = 2$$ Summen- und Produktregel

b) Untersuche $$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k\cdot(k+1)}{k\cdot 2^{k+1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Konvergenzradius $R = \frac{1}{2}$

c) Verhalten für $x = -\frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{2}$ untersuchen

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$$ divergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{k}$$ Konvergenz (Leibniz)

$$\Rightarrow M = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]$$

Aufgabe 3: **Extremwerte** **9 Punkte**

Ein Draht der Länge 1 (die Maßeinheit spielt hier keine Rolle) soll so in drei Teile zerschnitten werden, dass diese ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt eines solchen Dreiecks?

Hinweis 1: Seien x, y, z die Längen der drei Teile wobei x und y die beiden Kathetenlängen bezeichen sollen. Dann bestimmt jedes x aus den Intervall $(0, \frac{1}{2})$ eindeutig die entsprechenden Werte von $y = y(x)$ und $z = z(x)$ und der gesuchte Flächeninhalt kann durch die Funktion $f(x) = \frac{x \cdot y(x)}{2}$ ausgedrückt werden.

Hinweis 2: Wer Schwierigkeiten bei der Herleitung von $f(x)$ hat, kann das folgende Zwischen- und Kontrollergebnis verwenden: $f(x) = \dfrac{x - 2x^2}{4(1-x)}$.

Hinweis 3: Der Nachweis des Maximums durch die zweite Ableitung wäre sehr aufwändig. Versuchen Sie deshalb, ein einfacheres Argument zu finden.

$x+y=1$ und $x^2+y^2=z^2 \Rightarrow z=1-x-y$ und

$$x^2+y^2=(1-x-y)^2=1+x^2+y^2-2x-2y+2xy$$

Umstellen nach y : $y(2-2x)=1-2x \Rightarrow y=\dfrac{1-2x}{2-2x}$

$$f(x)=x\cdot y/2=\frac{x-2x^2}{4(1-x)}$$

Ableitung : $f'(x)=\dfrac{(1-4x)\cdot\cancel{4}(1-x)+\cancel{4}(x-2x^2)}{4\,\cancel{16}\,(1-x)^2}=\dfrac{2x^2-4x+1}{4(1-x^2)}$

$f'(x)=0 \iff x^2-2x+\frac{1}{2}=0$: $x_{1/2}=1\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

wegen $0\le x\le\frac{1}{2}$ kommt nur $x_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ in Frage

$$y(x_2)=\frac{1-2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}{2-2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=x_2$$

$$f(x_2)=x_2\cdot y(x_2)/2=\frac{x_2^2}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}-\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f(x_2)$ muss lokales Maximum sein, weil f stetig auf $[0,\frac{1}{2}]$ und $f(0)=f(\frac{1}{2})=0$ und $f(x_2)>0$, d.h. f muss lokales Max. in $(0,\frac{1}{2})$ annehmen und x_2 ist die einzige Nullstelle von f in $(0,\frac{1}{2})$

Aufgabe 4: **Integration** **4 + 4 Punkte**

Berechnen Sie das bestimmte Integral in a) mit Hilfe einer geeigneten Substitution und das unbestimmte Integral in b) mit partieller Integration.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x \, e^{\sin^2 x} \, \mathrm{dx}$ b) $\displaystyle\int x^2 \, e^{-2x} \, \mathrm{dx}$

a) $\int \sin x \cos x \, e^{\sin^2 x} dx = \int t \cdot e^{t^2} dt = \frac{1}{2}\int e^s ds = *$

1. Subst. $t = \sin x$ $dt = \cos x \, dx$

2. Subst $s = t^2$ $ds = 2t \, dt$

$* = \frac{1}{2} e^s + c = \frac{1}{2} e^{t^2} + c = \frac{1}{2} e^{\sin^2 x} + c$

Resubstitutionen

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x \, e^{\sin^2 x} dx = \frac{1}{2} e^{\sin^2 x} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(e^{1/2} - e^0\right)$

$= \frac{\sqrt{e} - 1}{2}$

b) $\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx$

$u'(x) = e^{-2x}$ $u(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ $u'(x) = e^{-2x}$ $u(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$v(x) = x^2$ $v'(x) = 2x$ $v(x) = x$ $v'(x) = 1$

$= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-2x} + \int e^{-2x} dx$

$= -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-2x} + C$