Kapitel 3

Grenzwerte von Folgen und Funktionen

3.1 Grenzwerte von Folgen

Definition: Eine Folge ist (formal gesehen) eine Abbildung von $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}^+$ nach $\mathbb{R}$, d.h. jedem $n \in \mathbb{N}$ wird ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Abweichend von der funktionalen Notation werden für Folgen die Schreibweisen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ oder $a_0, a_1, a_2, \ldots$ verwendet.
Man nennt die Zahlen a_n die Glieder der Folge. Sie können explizit oder auch rekursiv definiert werden.

Beispiele für explizite Definitionen:

1. Konstante Folge ($c \in \mathbb{R}$): Durch die Definition $a_n = c$ entsteht die Folge $(c)_{n\in\mathbb{N}} = c, c, c, \ldots$

2. Arithmetische Folge ($c, d \in \mathbb{R}$): Durch die Definition $a_n = c + n \cdot d$ entsteht die Folge $(c + n \cdot d)_{n\in\mathbb{N}} = c, c + d, c + 2d, \ldots$

3. Geometrische Folge ($c, q \in \mathbb{R}, q \neq 0$): Durch die Definition $a_n = c \cdot q^n$ entsteht die Folge $(c \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}} = c, cq, cq^2, cq^3, \ldots$

4. Harmonische Folge: Durch die Definition $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ entsteht die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^+} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Beispiele für rekursive Definitionen:

1. Eine konstante Folge wird rekursiv durch $a_0 = c$ und $a_{n+1} = a_n$ definiert.

2. Eine arithmetische Folge wird rekursiv durch $a_0 = c$ und $a_{n+1} = a_n + d$ definiert

3. Eine geometrische Folge wird rekursiv durch $a_0 = c$ und $a_{n+1} = a_n \cdot q$ definiert.

4. Auch die harmonische Folge kann man rekursiv definieren, aber diese Beschreibung ist mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_n}+1}$ wesentlich komplizierter ist als die explizite Definition.

5. Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist ein Beispiel dafür, dass bei rekursiven Definitionen eventuell auch Verankerungen an mehr als einer Stelle notwendig sind: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Beschränktheit und Monotonie

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man:

$$
\begin{array}{lcl}
\textit{beschränkt} & \Longleftrightarrow & \exists K\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad |a_n|\le K\\
\textit{von unten beschränkt} & \Longleftrightarrow & \exists K\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad a_n\ge K\\
\textit{von oben beschränkt} & \Longleftrightarrow & \exists K\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad a_n\le K\\
\textit{monoton wachsend} & \Longleftrightarrow & \forall n\in\mathbb{N}\quad a_{n+1}\ge a_n\\
\textit{streng monoton wachsend} & \Longleftrightarrow & \forall n\in\mathbb{N}\quad a_{n+1}> a_n\\
\textit{monoton fallend} & \Longleftrightarrow & \forall n\in\mathbb{N}\quad a_{n+1}\le a_n\\
\textit{streng monoton fallend} & \Longleftrightarrow & \forall n\in\mathbb{N}\quad a_{n+1}< a_n
\end{array}
$$

Konvergenz

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (strebt) gegen den *Grenzwert* a, falls

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists n_0\in\mathbb{N}\quad \forall n\ge n_0\quad |a_n-a|<\varepsilon$$

Zur Notation der Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a können die folgenden Ausdrücke verwendet werden:

$$
\begin{array}{ccc}
a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a & \text{oder kurz} & a_n\longrightarrow a\\
\lim_{n\to\infty} a_n = a & \text{oder kurz} & \lim a_n = a
\end{array}
$$

Satz: Für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist der Grenzwert eindeutig, d.h.

$$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad\wedge\quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \quad\Rightarrow\quad a=b$$

Beweis (indirekt): Angenommen, es gäbe eine Folge a_n, die gegen zwei verschiedene Zahlen $a\neq b$ konvergiert. Zur Herleitung eines Widerspruchs wird $\varepsilon=\frac{|b-a|}{3}>0$ gesetzt.

$$
\begin{array}{rcll}
\exists n_{0,a}\quad \forall n\ge n_{0,a} & & |a_n-a|<\varepsilon & \\
\exists n_{0,b}\quad \forall n\ge n_{0,b} & & |a_n-b|<\varepsilon & \\
n_0 & = & \max(n_{0,a},n_{0,b}) & \\
\text{Für alle } n>n_0 \text{ gilt:} & & & \\
|a_n-a|<\varepsilon & \wedge & |a_n-b|<\varepsilon & \\
|b-a| & \le & |b-a_n|+|a_n-a| & \text{Dreicksungleichung}\\
 & < & \varepsilon+\varepsilon & \\
 & = & \dfrac{2}{3}|b-a| & \text{Widerspruch!}\qquad\square
\end{array}
$$

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Man konstruiert eine Schranke, indem ein Wert für ε festgelegt wird, z.B. $\varepsilon:=1$. Nach Grenzwertdefinition gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n\ge n_0$ die Ungleichung $|a-a_n|\le 1$ erfüllt ist, die man äquivalent durch $a-1\le a_n\le a+1$ beschreiben kann.
Wählt man

$$K=\max\{|a_0|,|a_1|,\ldots|a_{n_0-1}|,|a-1|,|a+1|\},$$

dann ist $|a_n|\le K$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Nullfolgen und Teilfolgen

Definition: Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, wird *Nullfolge* genannt.

Definition: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen, dann wird $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} = a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt.

Satz: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, dann konvergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Beispiele:
1) Die harmonische Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge.
Begründung an Hand der Definition: Es sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Gesucht ist ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n - 0| = |\frac{1}{n}| < \varepsilon$ erfüllt ist. Da sich bei der Bildung der inversen Werte von positiven Zahlen die Ungleichungen umkehren, ist $n_0 := \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ eine geeignete Wahl, denn

$$n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

2) Die Folge $b_n = \frac{1}{n^2+4n+5}$ ist eine Nullfolge.

Begründung: Die Folge $c_n = (n^2 + 4n + 5)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und alle Folgeglieder sind natürliche Zahlen. Damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der harmonischen Folge und konvergiert gegen Null.

Bestimmte Divergenz

Definition: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, wenn sie nicht konvergiert, also keinen (eigentlichen) Grenzwert hat. Die Folge divergiert gegen den *uneigentlichen Grenzwert* ∞ bzw. $-\infty$ falls

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n > K \qquad \text{bzw.} \qquad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n < K$$

Man spricht in diesem Fall von bestimmter Divergenz und drückt das symbolisch durch $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ aus.

Beispiele:

1. Für die arithmetische Folge $a_n = c + n \cdot d$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} c & \text{falls} \quad d = 0 \\ \infty & \text{falls} \quad d > 0 \\ -\infty & \text{falls} \quad d < 0 \end{cases}$$

2. Für die geometrische Folge $b_n = c \cdot q^n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \text{unbestimmt divergent} & \text{falls} \quad q \leq -1 \text{ und } c \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad |q| < 1 \text{ oder } c = 0 \\ c & \text{falls} \quad q = 1 \\ \infty & \text{falls} \quad q > 1 \text{ und } c > 0 \\ -\infty & \text{falls} \quad q > 1 \text{ und } c < 0 \end{cases}$$

Reihen

Definition: Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert man die zugehörige *Reihe* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Folge der *Partialsummen*:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Konvergiert eine Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert S, kann neben der üblichen Notation $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ auch die Schreibweise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ verwendet werden.

3.2 Grenzwertregeln und Konvergenzkriterien

Grenzwertregeln

Satz: Für zwei konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Grenzwerten a und b gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ (Spezialfall: $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot b_n) = c \cdot b$)
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$)
4. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} = \sqrt{|a|}$

Beweis: Wir beschränken uns auf die Herleitung der ersten zwei Regeln.
1) Zu zeigen ist, dass man für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 finden kann, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$ gilt. Dazu nutzt man die Dreiecksungleichung und zeigt dann, dass beide Summanden jeweils kleiner als $\varepsilon/2$ sind:

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Die mit $(*)$ gekennzeichnete Ungleichung leitet man aus der Konvergenz der Ausgangsfolgen ab. Dazu setzt man $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ und erhält

$$\begin{array}{lll} \exists n_{0,a} & \forall n \geq n_{0,a} & |a_n - a| < \varepsilon' \\ \exists n_{0,b} & \forall n \geq n_{0,b} & |b_n - b| < \varepsilon' \end{array}$$

Offensichtlich gelten beide Ungleichungen für alle $n > n_0 = \max(n_{0,a}, n_{0,b})$ $\square$

2) Zu zeigen ist, dass man für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 finden kann, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$ gilt. Der Beweis ist etwas komplizierter, folgt aber dem gleichen Muster wie im ersten Fall. Vor Anwendung der Dreiecksungleichung wird ein 0-Summand der Form $-a_n b + a_n b$ eingefügt:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Zur Begründung der Ungleichung $(*)$ verwendet man die Tatsache, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Sei K eine Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man setzt geeignete Werte $\varepsilon', \varepsilon''$ für die Ausgangsfolgen ein und erhält:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2K}: \quad & \exists n_{0,b} \quad && \forall n \geq n_{0,b} \quad |b_n - b| < \varepsilon' \\
& \implies && \forall n \geq n_{0,b} \quad |a_n||b_n - b| < \frac{\varepsilon \cdot a_n}{2K} \leq \frac{\varepsilon}{2} \\
\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \quad & \exists n_{0,a} && \forall n \geq n_{0,a} \quad |a_n - a| < \varepsilon'' \\
& \implies && \forall n \geq n_{0,a} \quad |b||a_n - a| < \frac{\varepsilon \cdot |b|}{2(|b|+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

Offensichtlich gelten beide Ungleichungen für alle $n > n_0 = \max(n_{0,a}, n_{0,b})$ $\square$

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right) \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} && \text{(Regel 3)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} 3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)} && \text{(Regel 1 und 2)} \\
&= \frac{2 + 3 \cdot 0}{1+0} = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{8n^3 + 5n - 18}{36n^3 - 100n^2}} &= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3 \cdot \left(8 + \frac{5}{n^2} - \frac{18}{n^3}\right)}{n^3 \cdot \left(36 - 100 \cdot \frac{1}{n}\right)}\right)} && \text{(Regel 5)} \\
&= \sqrt{\frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(8 + \frac{5}{n^2} - \frac{18}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(36 - 100 \cdot \frac{1}{n}\right)}} && \text{(Regel 3)} \\
&= \sqrt{\frac{8}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{3} && \text{(Regel 1 und 2)}
\end{aligned}
$$

Vergleichskriterium

Satz: Sei $k \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \geq k$. Konvergieren die beiden äußeren Folgen gegen den gleichen Grenzwert $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. Entsprechendes gilt auch für die bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$.

Beispiel: Zu bestimmen ist der Grenzwert von $a_n = \frac{\sin^2 n}{n}$:

- Wegen $0 \leq \sin^2 n \leq 1$ gilt $0 \leq \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n}$.
- Außerdem ist $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$.
- Daraus folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right) = 0$.

Satz: Der Grenzwert von $a_n = \sqrt[n]{n}$ mit $n \geq 1$ ist 1.

Beweis: Die Herleitung dieses Grenzwerts erfolgt über die Hilfsfolge $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Mit dem Vergleichskriterium wird gezeigt, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, woraus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ folgt. Die Folge b_n ist von unten durch 0 begrenzt. Eine obere Begrenzung ergibt sich aus der folgenden Betrachtung:

$$\begin{aligned}
(b_n+1)^n &= \left(\sqrt[n]{n} - 1 + 1\right)^n = n \\
n &= (1+b_n)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot b_n + \binom{n}{2} \cdot b_n^2 + \dots \\
n &\geq 1 + \binom{n}{2} \cdot b_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot b_n^2 \\
(n-1) &\geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot b_n^2 \\
1 &\geq \frac{n}{2} \cdot b_n^2 \\
b_n^2 &\leq \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ ergibt sich aus dem Vergleichskriterium und der fünften Grenzwertregel

$$0 = \lim_{n\to\infty} b_n^2 = \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \text{und somit} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1. \qquad \square$$

Folgerung: Die Limesbildung erhält schwache Ungleichungen, d.h. sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $a_n \leq b_n$ (für $n \geq n_0$), dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Achtung: Dies gilt *nicht* für starke Ungleichungen.

Monotoniekriterium

Satz: Jede monoton wachsende (fallende), beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Beweis:

- Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, dann ist $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Grenzwert der Folge: Gegeben sei ein $\varepsilon > 0$ und zu zeigen ist, dass ein n_0 existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt. Da a eine obere Schranke für alle Glieder der Folge ist und die Folge monoton wächst, reicht es zu zeigen, dass ein n_0 mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$ existiert. Ein solches n_0 muss es aber geben, denn andernfalls wäre $a - \varepsilon$ eine obere Schranke für alle a_n, ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass a die kleinste obere Schranke ist.
- Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, dann ist $a = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Grenzwert der Folge (Begründung analog).

Beispiele:
1) Die geometrische Folge $a_n = c \cdot q^n$ konvergiert für $c \geq 0$ und $0 \leq q < 1$ gegen 0.
Begründung: Die Folge a_n ist monoton fallend und mit $0 \leq a_n \leq c$ beschränkt. Daraus folgt die Konvergenz gegen das Infimum a der Menge $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Dieser Grenzwert a muss gleich Null sein, denn $a \geq 0$ ist offensichtlich und aus $a > 0$ würde $\frac{a}{q} > a$ folgen (wegen $\frac{1}{q} > 1$).

Dann gäbe es ein $a_n < \frac{a}{q}$ und folglich wäre $a_{n+2} = a_n \cdot q^2 < \frac{a}{q}q^2 = aq < a$, ein Widerspruch dazu, dass a eine untere Schranke für alle a_n ist.

2) Die geometrische Reihe $s_n = \sum_{k=0}^{n} c \cdot q^n$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{c}{1-q}$.

Begründung: Die bekannte Formel für die geometrische Summe $\sum_{k=0}^{n} c \cdot q^n = c \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ lässt sich leicht mit vollständiger Induktion beweisen. Folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(c \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = c \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-q^{n+1})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-q)} = \frac{c}{1-q}$$

3) Die zur Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige Reihe konvergiert.
Begründung: Die Reihe

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

ist monoton wachsend, denn $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2} &\le \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\
s_n &\le 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{n} \qquad\qquad \text{(Teleskopsumme)} \\
&< 2
\end{aligned}$$

Damit wurde die Konvergenz der Reihe nachgewiesen, ohne den konkreten Grenzwert zu kennen. Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass die Reihe gegen $\frac{\pi^2}{6}$ konvergiert.

Cauchy-Kriterium

Satz: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \qquad \forall n, m \ge n_0 \qquad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Der Beweis, dass die Bedingung $(*)$ notwendig ist, erfolgt nach dem (inzwischen) üblichen Schema. Man setzt $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, erhält aus der Grenzwertdefinition ein n_0, so dass für alle $n, m \ge n_0$ der Abstand von a_n (bzw. a_m) zum Grenzwert a kleiner als ε' ist und leitet mit der Dreiecksungleichung die Bedingung $(*)$ ab.

Zum Beweis, dass die Bedingung $(*)$ hinreichend ist, zeigt man zuerst, dass aus $(*)$ die Beschränktheit von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt und betrachtet dann eine Hilfsfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die wie folgt definiert ist:

$$b_n = sup(a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

Da die Mengen, von denen das Supremum gebildet wird, immer kleiner werden, ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, von unten beschränkt durch $inf(a_0, a_1, \ldots)$ und damit konvergent. Es bleibt zu zeigen, dass $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ auch der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Für ein gegebenes

$\varepsilon > 0$ wird $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$ gesetzt:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Bedingung (*)} & : & \exists n_0 \qquad \forall m,n \geq n_0 \qquad |a_n - a_m| < \varepsilon' \\
b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n & : & \exists n_1 > n_0 \quad \forall n \geq n_1 \quad |b_n - b| < \varepsilon' \\
b_{n_1} = sup(a_{n_1}, a_{n_1+1}, \ldots) & : & \exists n_2 > n_1 \qquad |a_{n_2} - b_{n1}| < \varepsilon' \\
\text{Dreiecksungleichung:} & : & \forall n \geq n_2 \quad |a_n - b| \leq |a_n - a_{n_2}| + |a_{n_2} - b_{n_1}| + |b_{n_1} - b| < 3\varepsilon' = \varepsilon
\end{array}$$

Eine wichtige Anwendung des Cauchy-Kriteriums besteht im Nachweis der Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe. Die harmonische Reihe $s_n = \sum_{1=1}^{n} \frac{1}{i}$ ist nicht konvergent, sie divergiert gegen ∞:

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n} \\
&> \frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}}_{4} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{n+2}{2}
\end{aligned}$$

Im Gegensatz dazu konvergiert die alternierende harmonische Reihe

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} -1^{i+1}\frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Zum Beweis kann man die Differenzen $s_m - s_n$ für 1 $m > n$ untersuchen und mit vollständiger Induktion nach $m - n$ die folgenden zwei Eigenschaften nachweisen:

1. $s_m - s_n \geq 0 \Longleftrightarrow n$ ist gerade
2. $|s_m - s_n| \leq \frac{1}{n+1}$

Mit der zweiten Eigenschaft ist das Cauchy-Kriterium erfüllt und folglich konvergiert die Reihe.
Diese Beweisidee kann auch dazu verwendet werden, eine verallgemeinerte Aussage über alternierende Reihen abzuleiten.

Satz: Ist eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton (wachsend oder fallend), dann konvergiert die alternierende Reihe $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n a_n$.

3.3 Die Eulersche Zahl e und die Exponentialfunktion

In diesem Abschnitt wird die Eulersche Zahl e als Grenzwert einer speziellen Reihe eingeführt und die Gleichheit mit dem Grenzwert einer anderen Folge gezeigt. Aus dem Zusammenspiel dieser beiden Grenzwerte ergeben sich interessante Eigenschaften von e, insbesondere als Basis der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus'.

Satz: Reihe $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ konvergiert.

Begründung mit dem Monotoniekriterium:
1) Die Reihe ist streng monoton wachsend, denn $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.
2) Die Reihe ist von oben durch 3 beschränkt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!} &\leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \\
s_n &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\
&< 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \leq 3
\end{aligned}$$

Definition: Die Eulersche Zahl e ist definiert als $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) \approx 2,71828$

Satz: Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e.

Vor dem Beweis soll die Bedeutung dieser Folge für natürliche Wachstumsprozesse an einem Beispiel erläutert werden. Eine Kapitalanlage soll in einem Jahren mit einem fiktiven Zinssatz von 100% verzinst werden. Was ist der Unterschied zwischen einer einmaligen Verzinsung nach Ablauf des Jahres, einer monatlichen Verzinsung mit $\frac{100}{12}$% und einer täglichen Verzinsung mit $\frac{100}{365}$%? Der Faktor der Kapitalvermehrung bei n-facher Aufzinsung wird durch das Folgeglied $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ beschrieben.

$n = 1$	jährliche Aufzinsung	$a_1 = 2$
$n = 12$	monatliches Aufzinsung	$a_{12} = 2,613$
$n = 365$	tägliche Aufzinsung	$a_{365} = 2,714$

Beweis:

- Monotonie

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot n}{n^n \cdot n^{n-1} \cdot (n-1) \cdot n} \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^n}{n^{2n}} \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^n = \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\
&\overset{*}{\geq} \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1
\end{aligned}$$

Für die mit $(*)$ gekennzeichnete Ungleichung wurde die Bernoulli-Ungleichung $(1-h)^n \geq 1 - n \cdot h$ mit $h = \frac{1}{n^2}$ verwendet. Damit ist c_n monoton wachsend.

- Beschränkung: Wir zeigen $c_n \leq e$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} c_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &\overset{*}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e \end{aligned}$$

  Für die mit $(*)$ gekennzeichnete Ungleichung wurde die folgende Abschätzung verwendet

$$\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k! \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{k!}$$

- Konvergenz gegen e: Nach dem Monotoniekriterium konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $a \leq e$. Im Folgenden wird $a \geq s_N$ für jeden festen Wert $N \in \mathbb{N}$ gezeigt. Daraus folgt die Ungleichung $a \geq \lim s_n \geq e$ und letztlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e$$

  .

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n^k}\right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n^k}\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{N}{n}\right)^N \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{N}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{N}{n}\right)\right)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} = s_N$$

□

Die Exponentialfunktion als Grenzwert

Satz: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Auf den Beweis, der große Ähnlichkeit mit dem Beweis des letzten Satzes hat, wird hier verzichtet. Die Existenz dieser Grenzwerte erlaubt die Definition der (reellen) Exponentialfunktion und der nachfolgende Satz (ebenfalls ohne Beweis) zeigt die Übereinstimmung dieser neuen Definition mit den schon vorher eingeführten Potenzen mit rationalen Exponenten.

Definition: Die Exponentialfunktion $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wird für jedes $x \in \mathbb{R}$ durch $exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ definiert.

Satz: Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)$, d.h. für alle rationalen Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ gilt $exp(q) = e^q$.

Folgerung 1: Es gilt $exp(0) = 1$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $exp(x) = \frac{1}{exp(-x)}$.

Folgerung 2: Die Exponentialfunktion exp ist streng monton wachsend, d.h. aus $x < y$ folgt $exp(x) < exp(y)$, und $exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist exp eine bijektive Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^+$. Die Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

Der Zusammenhang zwischen Exponentialfunktion und natürlichem Logarithmus lässt sich wie folgt charakterisieren:

$$\ln a = b \iff exp(b) = e^b = a \qquad \text{insbesondere ist} \qquad a = exp(\ln a) = e^{\ln a}$$

Das Exponentialgesetz $exp(x + y) = exp(x) \cdot exp(y)$ impliziert für die Umkehrfunktion die Regel $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$.
Man kann den natürlichen Logarithmus auch nutzen, um neue Exponentialfunktionen für beliebige Basen $a > 0$ und ihre Umkehrfunktionen $\log_a$ definieren:

$$a^x = (e^{\ln a})^x := e^{(\ln a)\cdot x} \qquad \text{und} \qquad a^b = c \iff \log_a c = b$$

Insbesondere kann man aus

$$e^{\ln b} = b = a^{\log_a b} = e^{\ln a \cdot \log_a b} \quad \text{die Regel} \quad \log_a b = \frac{\ln a}{\ln b} \quad \text{ableiten.}$$

In verallgemeinerter Form lautet sie:

$$\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b} \qquad \text{für alle } a, b, c > 0.$$

3.4 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Grenzwerte von Funktionen

Definition: Es seien

- $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall
- $a \in I$ bzw. $a \in \{\pm\infty\}$
- $f : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ bzw. $f : I \to \mathbb{R}$ (falls $a \in \{\pm\infty\}$) eine Funktion

Dann gilt:

- Die Funktion f hat in a den *Grenzwert* c, falls für jede Folge $x_n \in I$ mit dem Grenzwert a die Folge der entsprechenden Funktionswerte den Grenzwert c hat, d.h.:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

- Die Funktion f hat in a den *linksseitigen Grenzwert* c, falls $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für jede Folge $x_n \in I$ mit dem Grenzwert a und der Eigenschaft $x_n < a$.
- Die Funktion f hat in a den *rechtsseitigen Grenzwert* c, falls $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für jede Folge $x_n \in I$ mit dem Grenzwert a und der Eigenschaft $x_n > a$.

Zur Notation verwendet man:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ für den Grenzwert
- $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = c$ für den linksseitigen Grenzwert und

- $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = c \quad$ für den rechtsseitigen Grenzwert.

Da man mit dieser Definition die Grenzwerte von Funktionen auf Grenzwerte von Zahlenfolgen zurückgeführt hat, übertragen sich auf natürliche Weise auch die bekannten Grenzwertsätze und Konvergenzkriterien.

Satz: Aus $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d$ folgt

- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = c \pm d$
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = c \cdot d \qquad$ (Spezialfall: $\lim\limits_{x \to a} (b \cdot f(x)) = b \cdot d$ für $b \in \mathbb{R}$)
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d} \qquad$ (falls $d \neq 0$)

Bei den Anwendungen kommt es hauptsächlich darauf an, die richtigen Termunformungen vorzunehmen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \cdot (x^{n-1} + x^{x-2} + \ldots + x + 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} x^{n-1} + \lim_{x \to 1} x^{n-2} + \ldots + \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 1 \\
&= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{x+1} + 1\right)}{x \cdot \sqrt{x+1} + 1} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x + 1 - 1}{x \cdot \sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x \cdot \sqrt{x+1} - 1} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

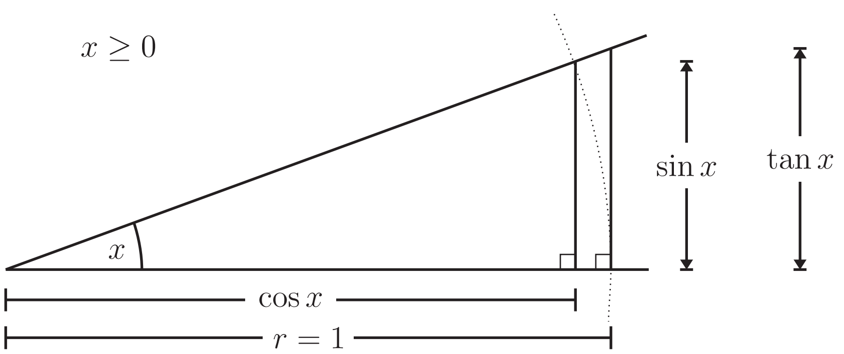
Satz (Vergleichskriterium): Seien f, g und h Funktionen mit

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{für alle } x \in I \quad \text{und} \quad a \in I \quad \text{,so dass}$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = c$$

$$\text{dann ist auch} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = c$$

Anwendung: Berechnung des Grenzwerts $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. Man vergleicht in der folgenden Grafik die Flächeinhalte des kleinen Dreiecks, des Kreisauschnitts und des großen Dreiecks.



$$\underbrace{\frac{\cos x \cdot \sin x}{2}}_{\text{kleines Dreieck}} \leq \frac{x \cdot \pi}{2\pi} \leq \underbrace{\frac{1 \cdot \tan x}{2}}_{\text{großes Dreieck}} \iff \cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Nun kann den Limes für die beiden äußeren Werte bestimmen:

$$\lim_{x \to 0+} \cos x = 1 = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\cos x}$$

Damit folgt aus dem Vergleichskriterium:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0+} \frac{-x}{\sin(-x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Schließlich erhält man aus der Kehrwertbetrachtung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}} = 1$$

Stetigkeit

Definition: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Die Funktion f heißt *stetig* im Punkt $x_0 \in I$, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Liegt x_0 Rand von I, wird nur der einseitige Limes betrachtet.

Satz: Eine Funktion f ist stetig in x_0 genau dann, wenn

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in I \;\; (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Beweis ($\Leftarrow$): Für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert x_0 muss $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0)$ gezeigt werden. Das bedeutet formal

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Für das gegebene ε betrachtet man das $\delta > 0$ aus der Bedingung $(*)$ und verwendet es in der Grenzwertdefinition von $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$:

$$\exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; |a_n - x_0| < \delta$$

Offensichtlich hat man damit das gesuchte n_0 gefunden, denn für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - x_0| < \delta$ und aus der Bedingung $(*)$ folgt $|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Beweis ($\Rightarrow$), indirekt: Man beginnt mit der Negation der Bedingung $(*)$ und muss daraus die Existenz einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert x_0 ableiten, so dass die Folge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ **nicht** gegen dem Grenzwert $f(x_0)$ konvergiert.

$$\neg(*) : \qquad \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in I \;\; (|x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird durch das folgende Argument konstruiert:

$$a_1 \;:\; \text{Setze } \delta = 1 \;\; \exists \underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{x} \in I \;\; (|x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

$$a_n \;:\; \text{Setze } \delta = \frac{1}{n} \;\; \exists \underset{\substack{\uparrow \\ a_n}}{x} \in I \;\; (|x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

Damit ist $\lim\limits_{n\to x_0} a_n = x_0$ (da $|a_n - x_0| < \frac{1}{n}$), aber $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit ist f nicht stetig in x_0. $\square$

Bemerkung: Ist f in x_0 nicht definiert, aber $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ existiert, dann kann man die Definition von f auf x_0 erweitern durch $f(x_0) := \lim_{x\to x_0} f(x)$. Eine solche Erweiterung wird stetige Fortsetzung der Funktion f im Punkt x_0 genannt.

Beispiele:

a) Bei rationalen Funktionen sind behebbare Lücken im Definitionsbereich schon per Konvention ausgeschlossen:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} \quad \text{wird gekürzt zu} \quad \frac{x+1}{1}$$

Damit ist $f(1) = 2$.

b) $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definiert und kann durch $g(0) := 1$ auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

c) $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definiert.

Wegen $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ muss man zur stetigen Fortsetzung $h(0) := \dfrac{1}{2}$ setzen.

Die folgenden Sätze sind wieder einfache Konsequenzen aus entsprechenden Grenzwertbetrachtungen.

Satz: Sind f und g stetig auf I, dann sind auch

- $f+g$, $f-g$ und $f\cdot g$ stetig auf I
- $\frac{f}{g}$ stetig in allen x_0, für die $g(x_0) \neq 0$

Satz: Ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I, eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ stetig auf D und ist $g(D) \subseteq I$, dann ist die Funktion $h(x) := f(g(x))$ stetig auf D.

Folgerungen:

- Polynome sind auf $\mathbb{R}$ stetig.
- Rationale Funktionen $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\mathrm{ggT}(p(x), q(x)) = 1$ sind stetig in allen $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$.

Satz: Für jede auf einem *abgeschlossenen* Intervall $[a,b]$ stetige Funktion f gilt:

- Schrankensatz:
$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b] \quad |f(x)| < K$$
- Satz vom Minimum und Maximum:
$$\exists x_0, x_1 \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

- Zwischenwertsatz:

$$\forall c \quad f(x_0) \le c \le f(x_1) \quad \exists x \in [a,b] \quad f(x) = c$$

- Gleichmäßige Stetigkeit:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in [a,b] \quad (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Asymptoten

Definition: Asymptoten einer Funktion (Kurve) $y = f(x)$ sind Geraden der folgenden Form:

a) Die durch $x = a$ definierte Gerade ist eine vertikale Asymptote, wenn $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$ oder $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$

b) Die durch $y = c$ definierte Gerade ist eine horizontale Asymptote, wenn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ oder $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$

c) Die durch $y = ax + b$ definierte Gerade ist eine schräge Asymptote, wenn $a \neq 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ oder $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0$

Diese drei Arten von Asymptoten können auch bei rationalen Funktionen auftreten.

Es sei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion wobei $\mathrm{ggT}(p(x), q(x)) = 1$ vorausgesetzt wird.

a) Ist b eine Polstelle von $f(x)$, dann ist $x = b$ vertikale Asymptote.

   - Wenn b ein k-facher Pol und k *gerade*, dann sind rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert *gleich*.
   - Wenn b ein k-facher Pol und k *ungerade*, dann haben rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert *entgegengesetztes Vorzeichen*.

b) Sei $n = \mathrm{Grad}(p(x))$ und $m = \mathrm{Grad}(q(x))$

   - Ist $m > n$, dann ist $y = 0$ eine horizontale Asymptote von $f(x)$.
   - Ist $m = n$, dann ist $y = \frac{a_n}{b_m}$ eine horizontale Asymptote von $f(x)$.
   - Ist $n = m + 1$, dann ist die Gerade

$$y = \frac{a_n}{b_m} \cdot x + \frac{b_m \cdot a_{n-1} - a_n \cdot b_{m-1}}{b_m^2}$$

   eine schräge Asymptote von $f(x)$.

Die Formeln für die horizontalen und schrägen Asymptoten folgen aus der Polynomdivision, d.h. die Geradengleichungen sind der ganzrationale Quotient aus der Polynomdivision.

3.5 Die $\mathcal{O}$-Notation und das asymptotische Wachstum von Funktionen

In diesem Abschnitt werden Anwendungen der Beschränktheit und Konevregenz von Folgen behandelt, die bei der Laufzeitanalyse von Algorithmen eine wichtige Rolle spielen. Dabei geht man davon aus, dass die möglichen Eingaben eines algorithmischen Problems nach ihrer Länge (Größe) unterscheiden kann.

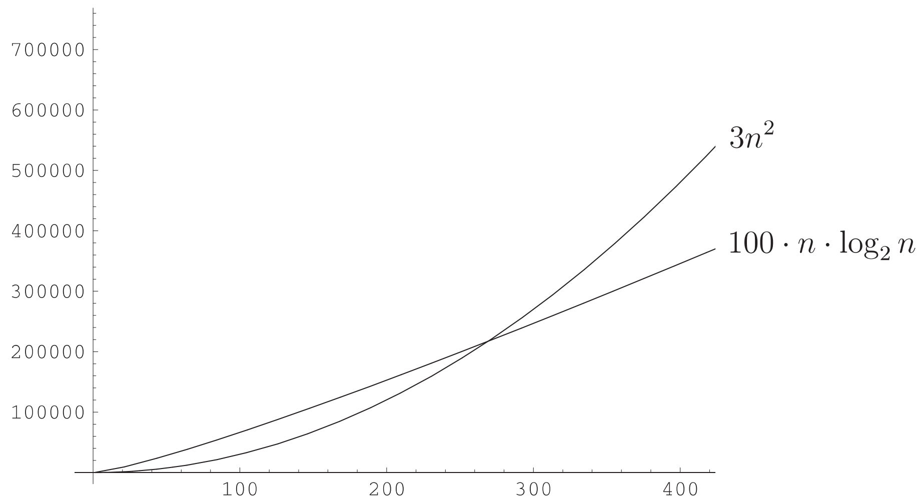
Definition: Die *Laufzeit* $T(n)$ eines Algorithmus ist die maximale Anzahl der Schritte bei Eingaben der Länge n.

Welche Schritte dabei gezählt werden (z.B. arithmetische Operationen, Vergleiche, Speicherzugriffe, Wertzuweisungen) hängt sehr stark von dem verwendeten Modell oder der verwendeten Programmiersprache ab. Oft unterscheiden sich die Laufzeiten des gleichen Algorithmus' unter Zugrundelegungung verschiedener Modelle um konstante Faktoren. Das Ziel der folgenden Betrachtungen besteht darin, den Einfluss solcher modell- und implementierungsabhängiger Faktoren auszublenden und damit einen davon unabhängigen Vergleich von Laufzeiten zu ermöglichen.

Beispiele:

- Die Binärsuche hat eine Laufzeit von $T_1(n) = c_1\lceil\log_2 n\rceil$.
- Quicksort hat eine Laufzeit von $T_2(n) = c_2 \cdot n^2$.
- Mergesort hat eine Laufzeit von $T_3(n) = c_3 \cdot n \cdot \lceil\log_2 n\rceil$, wobei c_1, c_2 und c_3 modell- und implementierungsabhängige Konstanten sind.

Die folgende Tabelle zeigt am Beispiel von zwei angenommenen Laufzeiten $T_2 = 3n^2$ und $T_3 = 100 \cdot n \cdot \log_2 n$ den schwindenden Einfluss von multiplikativen Konstanten bei großen Eingabelängen.



n	$3n^2$	Zeit in s bei 1 GHz	$100n \cdot \lceil\log_2 n\rceil$	Zeit in s bei 1 GHz
2	12	$0,012$ μs	200	$0,2$ μs
4	48	$0,048$ μs	800	$0,8$ μs
10^3	$3 \cdot 10^6$	3 ms	$\approx 10^6$	1 ms
10^6	$3 \cdot 10^{12}$	$3000s \approx 0,833$ h	$\approx 2 \cdot 10^9$	2 s
10^9	$3 \cdot 10^{18}$	$3 \cdot 10^9$ s ≈ 100 Jahre	$\approx 3 \cdot 10^{12}$	3000 s $\approx 0,833$ h

Definition: $g(n)$ ist *asymptotische obere Schranke* von $f(n)$, falls eine Konstante $c > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Die Menge aller Funktionen $f(n)$, für die eine gegebenene Funktion $g(n)$ eine asymptotische obere Schranke ist, wird mit $\mathcal{O}(g(n))$ bezeichnet. Analog dazu kann man mit unteren Schranken und starken oberen bzw. unteren Schraken verfahren.

Definition: Seien f und g Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

- Die Funktion g ist eine obere Schranke für alle Funktionen f aus:

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \quad | \quad \exists c > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

- Die Funktion g ist eine untere Schranke für alle Funktionen f aus:

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \quad | \quad \exists c > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

- Die Funktion g hat das gleiche Wachstum wie die Funktionen f aus:

$$\Theta(g(n)) = \mathcal{O}(g(n) \cap \Omega(g(n)))$$

- Die Funktion g ist eine starke obere Schranke für alle Funktionen f aus:

$$o(g(n)) = \{f(n) \quad | \quad \forall c > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

- Die Funktion g ist eine starke untere Schranke für alle Funktionen f aus:

$$\omega(g(n)) = \{f(n) \quad | \quad \forall c > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

Achtung: Anstelle der korrekten Schreibwiese $f(n) \in O(g(n))$ (für $g(n)$ ist asymptotische obere Schranke von $f(n)$) wird auch häufig die Notation $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ verwendet.

Lemma: Die Klassen $\mathcal{O}(g(n))$, $\Omega(g(n))$, $o(g(n))$, $\omega(g(n))$ können wie folgt durch Quotientenfolgen charakterisiert werden:

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt } \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$

$$f(n) = o(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \qquad \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$$

Die folgende Aufstellung zeigt Funktionen und Operationen, die bei Laufzeitabschätzungen häufig eine Rolle spielen:

- $f(n) = n$: Jede Eingabestelle sehen;
- $f(n) = \log_2 n$: Teile-und-Herrsche-Prinzip;
- $f(n) = \sqrt{n}$: Anwendung von Separatoren in planaren Graphen oder naiver Primzahltest;
- $f(n) = 2^n$: Untersuchung aller Teilmengen (Brute force);

- $f(n) = n!$: Untersuchung aller Permutationen;
- Summen: Hintereinander-Ausführung von Prozeduren;
- Produkte: geschachtelte Schleifen;

Die wichtigsten Grundregeln und Werkzeuge

1) Multiplikation mit Konstanten

Für alle $K \in \mathbb{R}^+$ und alle $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ gilt $K \cdot f(n) \in \Theta(f(n))$.

Begründung mit dem Quotientenkriterium: $\dfrac{K \cdot f(n)}{f(n)} \leq K$ und $\dfrac{f(n)}{K \cdot f(n)} \leq \dfrac{1}{K}$.

2) Summen und Produkte

Für alle $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ folgt gilt:

$$[f_1(n) \in \mathcal{O}(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in \mathcal{O}(g_2(n))] \Longrightarrow f_1(n) + f_2(n) \in \mathcal{O}(g_1(n) + g_2(n))$$

Begründung mit dem Quotientenkriterium:

$$\frac{f_1(n) + f_2(n)}{g_1(n) + g_2(n)} = \frac{f_1(n)}{g_1(n) + g_2(n)} + \frac{f_2(n)}{g_1(n) + g_2(n)} \leq \frac{f_1(n)}{g_1(n)} + \frac{f_2(n)}{g_2(n)} \leq K_1 + K_2$$

Analoge Regeln gelten für die Multiplikation an Stelle der Addition und für Ω, o bzw. ω an Stelle von $\mathcal{O}$.

3) Basisumwandlungen bei Logarithmen

Für alle $a > 1$ und $b > 1$ gilt $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$.

Begründung: $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$ und $\log_b a > 0$.

4) Logarithmen von Potenzen

Für alle $a > 1$ und $b, c > 0$ gilt $\log_a n^b \in \Theta(\log_a n^c)$.

Begründung: Wegen $\log_a n^b = b \cdot \log_a n$ und $\log_a n^c = c \cdot \log_a n$ sind die Quotienten durch $\frac{b}{c}$ bzw. $\frac{c}{b}$ beschränkt.

5) Stirling-Formel und $\log n!$

Die Stirling-Formel gibt eine Abschätzung des Wachstums von $n!$:

$$n! \in \Omega\left(\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}^n\right)\right)$$

genauer:

$$\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \leq \quad n! \quad \leq \quad \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n + \frac{1}{12n}}$$

Daraus kann man das Wachstum $\log n! \in \Theta(n \cdot \log n)$ ableiten, das man z.B. zum Nachweis der unteren Schranke für vergleichsbasierte Sortieralgorithmen benötigt. Es gibt dafür aber auch einen elementaren Beweis:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot \ldots \cdot n \leq n^n$$

Durch Logarithmieren erhält man

$$\frac{n}{2} \cdot \log_2 \frac{n}{2} = \log_2 \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \leq \log_2 n! \leq \log_2 n^n = n \cdot \log_{2_n}$$

wobei man auf der linken Seite noch mit der Ungleichung $\frac{\log_2 n}{2} \leq \log_2 \frac{n}{2}$ für alle $n \geq 4$ weiterarbeiten kann.

6) Logarithmen als Exponent

$$a^{\log_b n} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b n} = \left(b^{\log_b n}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}$$

ist eine Potenz von n. Ein konkretes Beispiel dafür ist $2^{\log_4 n} = n^{0.5} = \sqrt{n}$.

7) Logarithmieren erhält obere Schranken

Für alle $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit $g(n) \geq 2$ für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$f(n) \in \mathcal{O}\left(g(n)\right) \Longrightarrow \log f(n) \in \mathcal{O}\left(\log g(n)\right)$$

Begründung:

$$\frac{f(n)}{g(n)} \leq K \Longrightarrow \frac{\log f(n)}{\log g(n)} \leq \frac{\log K + \log g(n)}{\log g(n)}$$

Achtung: Die Regel gilt nicht für die starke obere Schranken, was man am Beispiel $f(n) = \sqrt{n}$ und $g(n) = n$ leicht nachweisen kann.

8) Vergleich von Potenzen

Für alle $0 < a < b$ gilt $n^a \in o(n^b)$.

Begründung: $\frac{n^a}{n^b} = n^{a-b} = \frac{1}{n^{b-a}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

9) Logarithmen gegen Potenzen

Für alle $a > 0$ und alle $b > 0$ gilt $(\log n)^a \in o(n^b)$, auch wenn a sehr groß und b sehr klein ist.

10) Potenzen gegen Exponentialausdrücke

Für alle $a > 0$, $b > 0$ und $c > 1$ gilt $n^a \in o(2^{b \cdot n})$ und $n^a \in o(c^n)$, auch wenn a sehr groß und b sehr klein ist.

Die Begründungen für die letzten zwei Regeln werden erst später besprochen als Anwendungen der Regel von Bernoulli–L'Hospital.