1 Definitionen

Ein zufälliger Graph ist ein Wahrscheinlichkeitsraum bestehend aus Graphen mit einer festen Knotenmenge $V = \{1, 2, .., n\}$. Der vollständige Graph K_n besitzt $N = \binom{n}{2}$ Kanten. Es gibt 2 Modelle für zufällige Graphen:

- Der Wahrscheinlichkeitsraum $\hat{G}(n, M)$, wobei $0 \leqslant M \leqslant N$ bestehend aus allen $\binom{N}{M}$ Teilgraphen von K_n mit M Kanten, wobei angenommen wird, dass jeder Graph $G \in \hat{G}(n, M)$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt. Daraus folgt, sei G_M ein zufällig gewählter Graph in $\hat{G}(n, M)$ und H ein fixer Graph mit n Knoten und M Kanten, dann ist die Wahrscheinlichkeit $P_M(G_M = H) = \binom{N}{M}^{-1}$.
- Der Wahrscheinlichkeitsraum $\hat{G}(n, p)$, wobei $0 \leqslant p \leqslant 1$ gilt. Um ein zufälliges Element daraus zu erhalten fügt man jede Kante des vollständigen Graphen K_n mit der Wahrscheinlichkeit p zu der Kantenmenge hinzu. $\hat{G} = (n, p)$ besteht aus allen 2^N möglichen Graphen mit n Knoten. Daraus folgt, sei G_p ein zufällig gewählter Graph in $\hat{G} = (n, p)$ und H ein fixer Graph mit $V_h = V$ und m Kanten, dann ist die Wahrscheinlichkeit $P_p(G_p = H) = p^m q^{N-m}$, wobei $q = 1 - p$.

2 Beispiel: Erwartungwert von Eigenschaft eines Graphen

Mit diesen Definitionen ist es möglich Zufallsvariablen zu definieren, die bestimmte Eigenschaften eines Graphen beschreiben. Zum Beispiel sei $X_s(G)$ eine Zufallsvariable, die die Anzahl aller vollständigen Graphen der Ordnung s in G beschreibt. (Man beachte, dass die Definition von X_s unabhängig von dem gewählten Modell ist) Analog dazu sei $X_s^{'}(G)$ die Anzahl der unabhängigen Knotenmengen der Ordnung s in G.

Sei $\hat{S} = \{\alpha \subseteq V || \alpha| = s\}$ die Menge aller s-elementigen Teilmengen der Knotenmenge V und für jedes $\alpha \in \hat{S}$ definiert man Y_α als Indikatorfunktion des vollständigen Graphen K_α:

$$Y_\alpha(G) = \begin{cases} 1 \text{ wenn } K_\alpha \text{ Clique in } G \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Daraus folgt

$$X_s(G) = \sum_{\alpha \in \hat{S}} Y_\alpha(G) \tag{2}$$

für jeden Graphen $G \subseteq K_n$. Unabhängig vom betrachten Modell ergibt sich der Erwartungswert von X_s:

$$E(X_s) = \sum_{\alpha \in \hat{S}} E(Y_\alpha) = \sum_{\alpha \in \hat{S}} P(Y_\alpha) \tag{3}$$

Analoge Definitionen ergeben sich für $X_s^{'}$ und dessen Erwartungswert. Im folgenden wird der Erwartungswert in den konkreten Wahrscheinlichkeitsräumen beschrieben. Sei $S = \binom{s}{2}$ die Anzahl aller möglichen Kanten zwischen s Knoten. In $\hat{G}(n, M)$ ergibt sich für den Erwartungswert E_M für Y_α folgendes

$$E_M(Y_\alpha) = P_M(Y_\alpha) = \binom{N-S}{M-S}\binom{N}{M}^{-1} \tag{4}$$

$$E_M(Y_\alpha^{'}) = P_M(Y_\alpha^{'}) = \binom{N-S}{M}\binom{N}{M}^{-1} \tag{5}$$

wobei $\binom{N-S}{M-S}$ die Anzahl der möglichen Kombinationen von Kanten beschreibt, wenn man M Kanten aus N auswählt und S Kanten als fix annimmt und $\binom{N-S}{M-S}$ die möglichen Graphen mit M Kanten wenn man fixe S Kanten als nicht vorhanden annimmt. Für den Erwartungswert im Modell $\hat{G}(n, p)$ ergeben sich einfachere Gleichungen:

$$E_p(Y_\alpha) = P_p(Y_\alpha) = p^S \tag{6}$$

$$E_p(Y_\alpha^{'}) = P_p(Y_\alpha^{'}) = q^S \tag{7}$$

Zusammen mit Gleichung 3 und der Beobachtung, dass $|\hat{S}| = \binom{n}{s}$, führt das zu folgendem Satz:

Satz 1. *Sei $X_S = X_S(G)$ die Anzahl der vollständigen Teilgraphen der Ordnung s in G und $X_s^{'} = X_s^{'}(G) = X_s(\overline{G})$, dann ist*

$$E_M(X_s) = \binom{n}{s}\binom{N-S}{M-S}\binom{N}{M}^{-1}, \tag{8}$$

$$E_M(X_s^{'}) = \binom{n}{s}\binom{N-S}{M}\binom{N}{M}^{-1} \tag{9}$$

und

$$E_p(X_s) = \binom{n}{s}p^S, E_p(X_s^{'}) = \binom{n}{s}q^S \tag{10}$$

3 Untere Schranke für Ramseyzahlen

Das Ramseytheorem in Bezug auf Graphen besagt folgendes:

Satz 2. ***(Ramseytheorem)*** *Für alle Zahlen $s, t \in \mathbb{N}$ existiert positives $R(s,t) = n$ so dass jede Zweifärbung der Kanten des vollständigen Graphen K_n entweder einen vollständigen Teilgraphen der Größe s in der einen Farbe oder ein vollständigen Teilgraphen der Größe t in der zweiten Farbe enthalten.*

$R(s,t)$ wird dabei als Ramseyzahl bezeichnet. Interessant ist dabei die minimale Ramseyzahl für ein gegebenes s und t zu bestimmen, also das kleinste n zu finden, so dass K_n diese Eigenschaften erfüllt. Wenn gilt, dass $s = t$ ist, spricht man auch vom symmetrischen Fall. Obwohl obere Schranken für Ramseyzahlen $R(s,t)$ bekannt waren, war es nicht einfach untere Schranken zu zeigen. Ein erster Beweis gelang Paul Erdős im Jahr 1947 mit Hilfe von zufälligen Graphen.

Satz 3. *Für $s \geqslant 4$ ist die untere Schranke für die Ramseyzahl $R(s,s) \geqslant 2^{\frac{s}{2}}$.*

Beweis: Man betrachte $G \in \hat{G}(n, \frac{1}{2})$ und nehme an, dass $n < 2^{\frac{s}{2}}$ ist. Dann ist der Erwartungswert für die Anzahl der Cliquen der Größe s laut (10) unter der Abschätzung $\binom{n}{s} \leqslant \frac{n^s}{2^{s-1}}$ wie folgt:

$$E_p(X_s) = \binom{n}{s}2^{-\binom{s}{2}} < 2^{\frac{s^2}{2}-\binom{s}{2}-s+1} = 2^{-\frac{s}{2}+1} \leqslant \frac{1}{2} \tag{11}$$

Damit ist gezeigt, dass der Erwartungswert, dass $G \in \hat{G}(n, \frac{1}{2})$ eine Clique der Größe s besitzt echt kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Auf analogem Weg kann dies auch für den Erwartungswert, dass G eine unabhängige Knotenmenge der Größe s hat, gezeigt werden:

$$E_p(X_s) = \binom{n}{s}2^{-\binom{s}{2}} < 2^{\frac{s^2}{2}-\binom{s}{2}-s+1} = 2^{-\frac{s}{2}+1} \leqslant \frac{1}{2} \tag{12}$$

Da die Summe der Erwartungswerte kleiner als 1 ist, folgt laut dem Expectiation Argument der probabilistischen Methode, es existiert ein Graph G der Größe $n < 2^{\frac{s}{2}}$, der weder einen Teilgraph der Größe s, noch eine unabhängige Knotenmenge der Größe s besitzt. Nimmt man alle Kanten von G und färbt sie in Farbe 1 und alle nicht vorhandenen Kanten von G in Farbe 2, so entsteht ein vollständiger Graph, der dem Ramseytheorem wiederspricht. Daraus folgt für die Ramseyzahl $R(s,s) \geqslant 2^{\frac{s}{2}}$. □

4 Eigenschaften fast aller Graphen

Will man eine bestimmte Eigenschaften A im Zufallsgraphen für ein $p = p(n)$, wobei p auch konstant sein kann, untersuchen, so untersucht man häufig die Wahrscheinlichkeit $P(G$ besitzt $A)$ für $G \in \hat{G}(n,p)$ wenn n gegen unendlich geht. Strebt diese Wahrscheinlichkeit gegen 1, sagt man Eigenschaft A trifft für *fast alle* Graphen $G \in \hat{G}$ zu. Strebt sie gegen 0, sagt man A trifft für *fast kein* Graphen $G \in \hat{G}$ zu.

Als Beispiel kann die Eigenschaft betrachtet werden, dass ein Graph H induzierter Teilgraph von $G \in \hat{G}$ ist.

Satz 4. *Für ein konstantes $0 < p < 1$ ist jeder Graph H ein induzierter Teilgraph fast aller Graphen $G \in \hat{G}(n,p)$*

Beweis: Sei H ein Graph mit k Knoten und U eine Knotenmenge, wobei $U \subseteq v(G)$ ist und $|U| = k$. Mit einer Wahrscheinlichkeit r ist $G[U]$ isomorph zu H. r ist nur abhängig von p, aber nicht von n, da $G[U]$ nur $\binom{k}{2}$ Kanten besitzt und jede mit Wahrscheinlichkeit p gewählt wird und k eine Konstante ist, die unabhängig von n ist. In G gibt es $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ disjunkte Knotenmengen U. Betrachtet man man die Wahrscheinlichkeit, dass keines der möglichen $G[U]$ isomorph zu H ist, beträgt diese $(1-r)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}$, da diese Ereignisse aufgrund der paarweisen Disjunktheit von der verschiedenen Kantenmengen U unabhängig voneinander sind. Daraus folgt

$$P(H \subsetneq G \text{ induziert}) \leqslant (1-r)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{13}$$

und somit haben fast alle Graphen $G \in \hat{G}(n,p)$ jeden Graphen festen H als induzierten Teilgraphen. □

5 Schwellenfunktionen

Bisher wurden nur Grapheneigenschaften für fast alle oder fast keinen Graphen betrachtet, bei denen die Wahrscheinlichkeit p konstant war. Interessanter ist es jedoch, wenn die Wahrscheinlichkeit $p = p(n)$ eine Funktion von n ist.

Definition 1. *Eine Funktion $t(n)$ mit $t(n) \neq 0$ heißt Schwellenfunktion für eine Grapheneigenschaft A wenn für jedes $p = p(n)$ und $G \in \hat{G}(n,p)$ gilt:*

$$P[G \text{ besitzt } A] = \begin{cases} 0, & \text{falls } p/t \to 0 \text{ für } n \to \infty \\ 1, & \text{falls } p/t \to \infty \text{ für } n \to \infty \end{cases}$$

Als einführendes Beispiel soll für die Eigenschaft $A = G$ enthält keine isolierten Knoten betrachtet werden. Wir wollen zeigen, dass ab einem bestimmten $p = p(n)$ fast alle Graphen in $\hat{G}(n,p)$ für $n \to \infty$ keine isolierten Knoten mehr besitzen. Dazu definieren wir die Indikatorvariable Y_i, die angibt ob Knoten i keine inzidente Kanten besitzt, und die Zufallsvariable X, die die Anzahl der isolierten Knoten angibt. Um dies zu zeigen benötigt man die Tschebyschev-Ungleichung

$$P(|X - E(X)|) \geqslant E[(X - E(X))^2]/t^2 \quad t > 0, t \in \mathbb{R} \tag{14}$$

bzw. das folgende Lemma, dass sich daraus ergibt:

Lemma 1. *Gilt $E(X^2)/E(X)^2 \to 1$, so folgt $P(X = 0) \to 0$*

Beweis: Für $X = 0$ gilt $|X - E(X)| = E(X)$. Somit folgt aus Lemma 14

$$P(X=0) \leqslant P(|X - E(X)| \geqslant E(X)) \leqslant \frac{E[(X - E(X))^2]}{E(X)^2} = \frac{E(X^2) - E(X)^2}{E(X)^2} \tag{15}$$

Falls $E(X^2)/E(X)^2 \to 1$ geht wird dieser Term zu 0 und daraus folgt das Lemma. □
Mit Lemma 1 ist es nun möglich mit Hilfe der Varianz und des Erwartungswertes eines Ereignisses die Wahrscheinlichkeit nach unten abzuschätzen und so folgenden Satz zu beweisen.

Satz 5. *$t(n) = \ln n/n$ ist eine Schwellenfunktion für die Grapheneigenschaft, dass ein Graph keine isolierten Knoten besitzt.*

Beweis: Zuerst ist zu zeigen, dass für ein konstantes $c > 1$ und $n \to \infty$ fast alle Graphen keine isolierte Knoten besitzen. Dazu wird der Erwartungswert von X berechnet mit $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = n(1-p)^{n-1}$. Dazu werden folgende Abschätzungen gemacht:

$$(1-p)^n = e^{nln(1-p)} = e^{n(-p-\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{3}-\frac{p^4}{4}-\dots)} = e^{-np}e^{-np^2(\frac{1}{2}+\frac{p}{3}+\frac{p^2}{4}+\dots)} \tag{16}$$

$ln(p-1)$ wurde hierbei mit Hilfe der Taylorreihe zu $-p-\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{3}-\frac{p^4}{4}-...$ für $0 \leqslant p \leqslant 1$ abgeschätzt. Betrachtet man $p = c\ln n/n$ für ein beliebiges, konstantes c gilt $np^2(\frac{1}{2}+\frac{p}{3}+\frac{p^2}{4}+\dots) \to 0$ und $(1-p)^{-1} \to 1$ für $n \to \infty$. Somit ist $E(X) \sim e^{-np} = n^{1-c}$ und da $c > 1$ ist gilt $E(X) \to 0$ für $n \to \infty$ und es ist gezeigt, dass fast alle Graphen keine isolierten Knoten haben.
Als Zweites muss gezeigt werden, dass für ein konstantes $c < 1$ und $n \to \infty$ fast alle Graphen isolierte Knoten besitzen. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass für $c < 1$ und $n \to \infty$ der Erwartungswert $E(X) = \infty$ ist. Dies reicht jedoch nicht aus um zu zeigen, dass fast alle Graphen die gewünschte Eigenschaft besitzen. Es kann z.B. mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein Graph ohne isolierte Knoten und ebenfalls Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein Graph mit n isolierten Knoten erzeugt werden. Dann ist zwar $E(X) = \infty$ jedoch haben nur die Hälfte der Graphen isolierte Knoten. Um das diese Fälle auszuschließen und eine sinnvolle Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit zu erhalten benutzen wir das bereits erwähnte Lemma 1: Aufgrund der Liniarität des Erwartungswertes und dass $Y_i = Y_i^2$ ergibt sich

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2) + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} E(Y_iY_j) = E(X) + n(n-1)E(Y_iY_j) \tag{17}$$

wobei X_iX_j ebenfalls eine Zufallsvariable ist, die mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)^{2n-3}$ den Wert 1 annimmt und sonst 0 ist. Dies gilt, da Knoten i und j zu $n-1$ anderen Knoten keine inzidenten Kanten besitzen darf, jedoch die Kante zwischen i und j nur einmal gezählt werden darf. Hier kann man die gleiche Abschätzung anwenden, wie im ersten Teil des Beweises und sieht, dass $(1-p)^3 \to 1$ und $(1-p)^{2n} \to e^{-2np}$ für $n \to \infty$. Somit ist $E(X^2) = E(X) + E(X)^2$ und $\frac{E(X^2)}{E(X)^2} \to 1$. Damit folgt aus Lemma 1, dass $P(X = 0) \to 0$ ist und somit fast keine Graphen keine isolierten Knoten besitzen.
Aus den beiden Teilen folgt, dass $t(n) = \ln n/n$ eine Schwellenfunktion für keine isolierte Knoten im Zufallsgraphen ist. $\square$

References

[Bol09] Bela Bollobas. *Modern Graph Theory*. Springer, 2009.

[Die96] Reinhard Diestel. *Graphentheorie*. Springer, 1996.

[NA08] Joel H. Spencer Noga Alon. *The Probabilistic Method*. John Wiley & Sons, 2008.

[Oel06] Kai-Friederike Oelbermann. Probabilistische methode, kapitel 10: Zufallsgraphen. *Universität Leipzig*, WS 2005/06.