# 1 Einleitung

Die Probabilistische Methode ist ein mächtiges Werkzeug um die Existenz von Objekten[1] zu beweisen. Im Allgemeinen versuchen wir dabei eine Aussage zu treffen, ob eine Menge von möglichen Objekten $\Omega$ ein Element enthält, das ein gegebenes Prädikat $\mathscr{P}$ erfüllt. Die Probabilistische Methode erlaubt uns ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitstheoretisches Problem zu betrachten. Dies ermöglicht uns die Verwendung von den Ergebnissen aus der Stochastik.

Obwohl die Probabilistische Methode in erster Linie Existenzaussagen trifft, ist es oft möglich aus der Analyse heraus direkt einen randomisierten Algorithmus anzugeben, der das gesuchte Element berechnet. Manchmal sind wir sogar in der Lage einen effizienten deterministischen Algorithmus abzuleiten. Es gibt jedoch auch Probleme, für die mithilfe der Probabilistischen Methode die Existenz der Lösung gezeigt werden kann, jedoch kein effizienter randomisierter oder deterministischer Algorithmus bekannt ist [4].

# 2 Basic Counting Argument

Können wir zeigen, dass ein zufälliges Objekt aus $\Omega$ mit einer positiven Wahrscheinlichkeit die gesuchte Eigenschaft $\mathscr{P}$ hat, dann muss es auch ein Objekt mit dieser Eigenschaft in $\Omega$ geben. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliges Objekt $\mathscr{P}$ erfüllt, entspricht dabei genau

$$P\left(\{\omega | \omega \in \Omega \wedge \mathscr{P}(\omega)\}\right)$$

Ist diese Wahrscheinlichkeit groß genug, kann direkt ein Monte Carlo oder Las Vegas Algorithmus angegeben werden, der den Lösungsraum durch zufälliges Ziehen der Objekte durchsucht. Zufälliges Ziehen (sampling) ist allerdings nicht immer effizient möglich.

# 3 Expectation Argument

Betrachten wir auf einem Wahrscheinlichkeitsraum eine Zufallsvariable $X$ für die der Erwartungswert $E(X)$ existiert, können wir sofort schließen, dass es mindestens ein $\omega \in \Omega$ gibt, für das die Zufallsvariable $X$ einen Wert kleiner oder gleich dem Erwartungswert annimmt und ein $\omega' \in \Omega$ für das $X$ einen Wert größer oder gleich dem Erwartungswert annimmt. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

*Beispiel:*

Sei $S$ ein Wahrscheinlichkeitsraum über allen Master Informatik Veranstaltungen mit Gleichverteilung. Sei $X$ eine Zufallsvariable, die eine Veranstaltung auf ihre ECTS abbildet. Der Erwartungswert von $X$ ist

$$E(X) = 6.02\overline{7}$$

[1] Ein Objekt kann im Kontext der Problemstellung beispielsweise ein Graph mit besonderen Eigenschaften, ein Algorithmus oder eine Belegung der Variablen einer aussagenlogischen Formel sein.

Intuitiv ist klar, dass es Veranstaltungen geben muss, die weniger als $E(X)$ ECTS wert sind und solche die, mehr wert sind. Beispiele wären

- Seminar über Algorithmen (4 ECTS)
- Höhere Algorithmik II (8 ECTS)

$\triangleleft$

*Beweis:* Sei $X$ eine Zufallsvariable über einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum für die der Erwartungswert existiert. Es gilt:

$$E(X) = \sum_x xP(X = x)$$

Nehmen wir jetzt an, dass $P(X \geq E(X)) = 0$.

$$E(X) = \sum_x xP(X = x) \leq \sum_{x<E(X)} < \sum_{x<E(X)} E(X)P(X = x) = E(X) \quad ↯$$

Der Beweis von $P(X \leq E(X)) > 0$ verläuft analog. ■

## 4 Derandomisierung

In dem letzten Kapitel haben wir über den Erwartungswert einer Zufallsvariablen $X$ auf die Existenz von Objekten $\omega, \omega' \in \Omega$ mit $X(\omega) \leq E(X) \wedge X(\omega') \geq E(X)$ geschlossen. Allerdings ist noch offen, wie diese Objekte effizient und deterministisch berechnet werden können. Ein Ansatz ist die *Methode der bedingten Erwartungswerte.*

Wir nehmen dazu an, dass jedes $\omega \in \Omega$ als Tupel von Attributen kodiert werden kann. Ein Attribut kann dabei einen beliebigen Wertebereich haben. Zu jedem Attribut definieren wir uns eine Zufallsvariable, die ein Objekt auf den entsprechenden Attributwert abbildet:

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega : \omega &= (a_1, \ldots, a_n) \\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} : A_i(\omega) &= a_i \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt den Erwartungswert von $X$, wenn wir durch die Zufallsvariablen $A_i$ alle Attributwerte festgelegt haben.

$$E(X|A_1 = a_1, A_2 = a_2, \ldots, A_n = a_n) = X((a_1, a_2, \ldots, a_n))$$

Die Gleichung gilt, da wir durch das Setzen aller Attribute den ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsraum auf ein einziges Element eingeschränkt haben. Wir wählen jetzt den Wert des $i$-ten Attributs so, dass der Erwartungswert von $X$ in dem daraus resultierenden (evtl. kleineren) Wahrscheinlichkeitsraum höchstens größer ist.

Wähle $a_i$ so, dass die folgende Ungleichung gilt

$$E(X|A_1 = a_1, \ldots, A_{i-1} = a_{i-1}) \leq E(X|A_1 = a_1, \ldots, A_{i-1} = a_{i-1}, A_i = a_i)$$

Indem wir dies iterativ durchführen bis wir alle Attribute festgelegt haben, finden wir genau ein Objekt $\omega \in \Omega$ für das $X(\omega) \geq E(X)$ gilt[2].

*Beweis:*

$$\begin{aligned} E(X) &\leq E(X|A_1 = a_1) \\ &\leq E(X|A_1 = a_1, A_2 = a_2) \\ &\leq \dots \\ &\leq E(X|A_1 = a_1, \dots, A_n = a_n) \\ &\Rightarrow E(X) \leq X\left((a_1, \dots, a_n)\right) \end{aligned}$$

■

## 5 Sample and Modify

Ein weiterer Ansatz, um die Existenz von Objekten zu zeigen, ist *Sample and Modify*. Im *Sample*-Schritt wählen wir zufällig ein Objekt aus $\Omega$, das im *Modify*-Schritt beliebig manipuliert werden können. Das Ziel des *Modify*-Schrittes ist entweder ein Objekt $\omega$ in ein Objekt $\omega'$ zu überführen, so dass wir auf Basis von $\omega'$ eine Aussage über $\omega$ treffen können, oder direkt zu zeigen, dass $\omega'$ $\mathscr{P}$ erfüllt. In dem ersten Fall muss $\omega'$ nicht notwendigerweise wieder Element von $\Omega$ sein, während dies in dem zweiten Fall zwingend notwendig ist, da die Existenzaussage nach Problemstellung auf $\Omega$ beschränkt ist.

## 6 Lovasz Local Lemma

Wenn wir in der Lage sind gefährliche Ereignisse $E_1, \dots, E_n$ zu identifizieren, so dass

$$\omega \text{ erfüllt } \mathscr{P} \Leftrightarrow \omega \notin \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

reduziert sich die Frage nach der Existenz eines Objektes, das $\mathscr{P}$ erfüllt auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E}_i\right)$$

Ist diese Wahrscheinlichkeit positiv, können wir mit der *Basic Counting Method* auf die Existenz eines $\omega$ schließen, das $\mathscr{P}$ erfüllt.

Falls die Ereignisse $E_1, \dots, E_n$ unabhängig sind, gilt

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E}_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i)$$

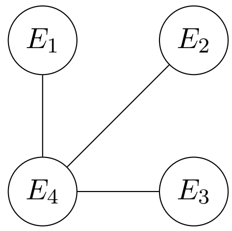
[2]Die Suche nach einem Element $\omega'$ mit $X(\omega') \leq E(X)$ verläuft analog.

Oft ist dies aber nicht der Fall oder schwierig zu beweisen. Das *Lovasz Local Lemma* bietet uns eine einfache Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit für abhängige Ereignisse zu berechnen, falls die Abhängigkeit beschränkt ist. Um die Abhängigkeit der Ereignisse beschränken zu können führen wir den Abhängigkeitsgraphen ein.

**Definition 1.** Seien $E_1, \cdots, E_n$ Ereignisse. Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \cdots, n\}$ und $E_j$ ist unabhängig von den Ereignissen $\{E_j | (i, j) \notin E\}$. Dann heißt $G$ der Abhängigkeitsgraph von $E_1, \cdots, E_n$.

*Beispiel:*

- $E_1$ unabhängig von $E_2, E_3$
- $E_2$ unabhängig von $E_1, E_3$
- $E_3$ unabhängig von $E_1, E_2$




◁

**Satz 1** (Lovasz Local Lemma)**.** *Seien $E_1, \cdots, E_n$ Ereignisse. Falls*

1. $\forall i \in \{1, \cdots, n\} : P(E_i) < p$
2. *Der Grad des Abhängigkeitsgraphen ist maximal $d$*
3. $4dp < 1$

*Dann gilt:*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E}_i\right) > 0$$

# Literatur

[1] Alon, Noga ; Spencer, Joel H.: *The Probabilistic Method (Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization).* 3. Wiley-Interscience, 2008

[2] Mitzenmacher, Michael ; Upfal, Eli: *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis.* Cambridge University Press, 2005

[3] Molloy, Michael ; Reed, Bruce ; Reed, B.: *Graph Colouring and the Probabilistic Method.* 1. Springer, 2001

[4] Motwani, Rajeev ; Raghavan, Prabhakar: *Randomized Algorithms.* Cambridge University Press, 1995

[5] Spencer, Joel: *Ten Lectures on the Probabilistic Method (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics).* 2. Society for Industrial Mathematics, 1987