Konstruktiver Beweis des Lovász Local Lemmas - Am Beispiel von Erfüllbarkeit von k-KNF Formeln

Naja v. Schmude
Freie Universität Berlin

7. Juni 2011

Outline

Einleitung

Lovász Local Lemma und Erfüllbarkeit

Konstruktiver Beweis des Lovász Local Lemmas

General Lovász Local Lemma

Nachbarschaft von Klauseln

Definition (Nachbarschaft einer Klausel)

Die Nachbarschaft $\Gamma(C)$ einer Klausel C in einer k-KNF Formel F ist gegeben durch die Menge der Klauseln, welche gemeinsame Variablen mit C haben. Die Menge der Variablen, die in einer Klausel C auftreten, sei durch $vbl(C)$ gegeben.

$$\Gamma(C) = \{D \in F \mid vbl(D) \cap vbl(C) \neq \emptyset\}$$

Lovász Local Lemma und Erfüllbarkeit

Theorem (Lovász Local Lemma (symmetrische Version))

Sei $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots A_m\}$ eine Menge von Zufallsereignissen eines Wahrscheinlichkeitsraums. Jedes Ereignis aus $\mathcal{A}$ hat eine Wahrscheinlichkeit von maximal p hat und ist maximal nur von d anderen Ereignissen aus $\mathcal{A}$ abhängig. Wenn $ep(d+1) \leq 1$ gilt, dann tritt mit positiver Wahrscheinlichkeit keines der Ereignisse aus $\mathcal{A}$ ein.

Lovász Local Lemma und Erfüllbarkeit

Theorem (Lovász Local Lemma (symmetrische Version))

Sei $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots A_m\}$ eine Menge von Zufallsereignissen eines Wahrscheinlichkeitsraums. Jedes Ereignis aus $\mathcal{A}$ hat eine Wahrscheinlichkeit von maximal p hat und ist maximal nur von d anderen Ereignissen aus $\mathcal{A}$ abhängig. Wenn $ep(d+1) \leq 1$ gilt, dann tritt mit positiver Wahrscheinlichkeit keines der Ereignisse aus $\mathcal{A}$ ein.

Theorem (SAT Formulierung)

Sei $k \in \mathbb{N}$ und F eine k-KNF Formel. Wenn $\forall C \in F : |\Gamma(C)| < \frac{2^k}{e} - 1$ gilt, dann ist F erfüllbar.

Konstruktionsalgorithmus

```
for all v ∈ F do
    v ← zufällige Belegung
end for
while ∃C ∈ F : C ist verletzt unter aktueller Variablenbelegung do
    C ← irgendeine verletzte Klausel aus F
    for all v ∈ vbl(C) do
        v ← zufällige Belegung
    end for
end while
```

Log einer Ausführung

Definition (Log des Algorithmus)

Als Log L wird die Abbildung $L : \mathbb{N} \to F$ bezeichnet, die zur i-ten Iteration der While-Schleife die durch den Algorithmus ausgewählte Klausel C zuweist.

Witness-Tree eines Logs

Definition (Witness-Tree)

Ein Witness-Tree T ist ein Wurzelbaum mit einem Labeling $\sigma : V(T) \to F$ der Knoten des Baums zu den Klauseln von F. Bei einem durch ein Log L gegebenem Ablauf des Algorithmus wird der Witness-Tree zur i-ten Iteration folgendermaßen aufgebaut:

- Die Wurzel r erhält das Label $\sigma(r) = L(i)$.
- Für jede Iteration $j = i - 1, i - 2, \ldots, 0$ wird der Baum folgendermaßen erweitert
  1. Falls es einen Knoten v im bisher aufgebauten Baum gibt, sodass $L(j) \in \Gamma(\sigma(v))$, dann füge einen neuen Knoten mit Label $L(j)$ an einen der tiefsten Knoten an, die diese Bedingung erfüllen.
  2. Andernfalls fahre mit dem nächsten j fort. Bei $j = 0$ ist der Baum zu Ende konstruiert.

General Lovász Local Lemma

Theorem (General Lovász Local Lemma)

Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge von Zufallsereignissen eines Wahrscheinlichkeitsraums. Für $A \in \mathcal{A}$ sei $\Gamma(A)$ die Teilmenge von $\mathcal{A}$, von der A abhängig ist. Falls eine Zurodnung $x : \mathcal{A} \to (0, 1)$ existiert, sodass

$$\forall A \in \mathcal{A} : Pr(A) \leq x(A) \prod_{B \in \Gamma(A)} (1 - x(B)) \text{ ,}$$

dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass keins der Ereignisse aus $\mathcal{A}$ eintritt, maximal

$$\prod_{A \in \mathcal{A}} (1 - x(A)) \text{ .}$$