

Logik und Diskrete Mathematik

Jens M. Schmidt

Tutoren: Klemens Kapp, David Karcher

Abgabe: keine, Lösungen im Tutorium vorstellen und besprechen

Aufgabe 1: Graph Drawing

Zeichnen Sie den folgenden Graphen $G = (\{1, \dots, 20\}, E)$ ohne Kantenkreuzungen in die Ebene, falls möglich.

Adjazenzliste für E :

1 → 2 → 5 → 10

11 → 8 → 12 → 18

2 → 1 → 3 → 6

12 → 4 → 11 → 15

3 → 2 → 4 → 8

13 → 10 → 14 → 16

4 → 3 → 5 → 12

14 → 5 → 13 → 15

5 → 1 → 4 → 14

15 → 12 → 14 → 17

6 → 2 → 7 → 9

16 → 13 → 17 → 20

7 → 6 → 8 → 19

17 → 15 → 16 → 18

8 → 3 → 7 → 11

18 → 11 → 17 → 19

9 → 6 → 10 → 20

19 → 7 → 18 → 20

10 → 1 → 9 → 13

20 → 9 → 16 → 19

Aufgabe 2: Hamiltonsche Graphen

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass ein Graph *Hamiltonsch* ist, wenn er einen Hamiltonschen Kreis, also einen aufspannenden Kreis, enthält. Eine Teilmenge V' der Knoten eines Graphen $G = (V, E)$ heißt *unabhängig*, wenn E keine Kante enthält, die zwei Knoten aus V' verbindet.

Zeigen Sie, dass ein Graph mit einer unabhängige Menge, die mehr als $n/2$ Knoten enthält, nicht Hamiltonsch sein kann.

Aufgabe 3: Längste Pfade

Zeigen Sie, dass in jedem zusammenhängenden Graphen je zwei Pfade maximaler Länge (mindestens) einen gemeinsamen Knoten haben müssen.

Hinweis: Probieren Sie einen Widerspruchsbeweis. Beachten Sie: Wenn es einen Weg zwischen zwei Knoten gibt, dann gibt es auch einen kürzesten Weg. Versuchen Sie, zuerst eine Beweisidee zu skizzieren und dann alle notwendigen Details auszuarbeiten.

Aufgabe 4: Graphfärbungen

Beweisen Sie, dass ein Graph, in dem der maximale Knotengrad k ist, $k + 1$ -färbbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie eine Totalordnung auf den Farben, um einigen Vorrang zu geben.