

Logik und Diskrete Mathematik

Jens M. Schmidt

Tutoren: Klemens Kapp, David Karcher

Abgabe: keine, Lösungen im Tutorium vorstellen und besprechen

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Welche Wahrscheinlichkeitsverteilungen haben folgende Zufallsvariablen? Geben Sie jeweils den Erwartungswert an.

- i) Durchschnittlich ist ein Mensch mit Wahrscheinlichkeit 0.4 blond. Sie sitzen an einem Schalter des Einwohnermeldeamtes Berlin und protokollieren zum Spaß die Haarfarbe aller Kunden. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der nächsten Kunden bis zum ersten blonden Kunden (einschließlich) angibt.
- ii) Durchschnittlich hat ein Mensch mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ mindestens einen Weißheitszahn. Sei Y die Zufallsvariable, die die Anzahl dieser Menschen aus einer zufälligen Menge von 10 Menschen bestimmt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 7 Menschen mindestens einen Weißheitszahn haben?
- iii) Ein Fischer fischt Fische mit einem Netz aus einem See, in dem n Fische leben; nach Einholen des Netzes befindet sich jeder Fisch mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ in dem Netz. Sei Z die Zufallsvariable, die die Anzahl der gefangenen Fische angibt.

Aufgabe 2: Varianz der geometrischen Verteilung

Beweisen Sie, dass die geometrische Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p die Varianz $(1-p)/p^2$ hat.

Hinweis: Benutzen Sie die folgende Formel, um die Varianzen schneller auszurechnen:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Aufgabe 3: Rekursionsgleichungen

Betrachten Sie Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$. Sei $z(n)$ die Anzahl dieser Wörter, in denen keine zwei Nullen hintereinander stehen.

- i) Stellen Sie eine Rekursionsgleichung für $z(n)$ auf und berechnen Sie geeignete Anfangsbedingungen.
- ii) Finden Sie eine geschlossene Formel für $z(n)$.

Aufgabe 4: Mini-Tetris

Sei A_n die Anzahl der Belegungen eines $2 \times n$ Rechtecks mit 1×2 -Dominosteinen, d. h. die Anzahl der Möglichkeiten, das Rechteck mit diesen Dominosteinen auszufüllen (z. B. ist $A_2 = 2$).

- i) Bestimmen Sie eine Rekursionsgleichung zur Berechnung von A_n
- ii) Bestimmen Sie eine geschlossene Formel zur Berechnung von A_n
- iii) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn auch 2×2 -Steine zur Verfügung stehen?