Logik und Diskrete Mathematik

Jens M. Schmidt Tutoren: Klemens Kapp, David Karcher

Abgabe: 04.07.2011 im Tutorium (bitte einzeln bearbeiten und abgeben)

Aufgabe 1: Semantische Äquivalenz und Relationen *(5+3+2=10 Punkte)*

Beweisen Sie, dass die semantische Äquivalenz $\equiv$ zwischen Termen über einer n-elementigen Variablenmenge V eine Äquivalenzrelation ist. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es? Wie viele Elemente können die Äquivalenzklassen maximal enthalten?

Aufgabe 2: Abschluss *(2+2+3+3=10 Punkte)*

Finden Sie für die folgenden Relationen jeweils den reflexiven Abschluss, den symmetrischen Abschluss und den transitiven Abschluss.

i) $\leq$ in $\mathbb{N}$
ii) R in $\mathbb{N}$ mit $aRb \Leftrightarrow b = a + 1$
iii) R in $\mathbb{R}$ mit $aRb \Leftrightarrow b = a + 1$
iv) R in $\mathbb{R}$ mit $aRb \Leftrightarrow |a - b| < 0.0005$

Aufgabe 3: Käse-Kombinatorik *(4+3+3=10 Punkte)*

Die Maus *Pinky* läuft in ihrem Gitter prinzipiell nur auf Wegen, die monoton sind. Sie befindet sich gerade am Gitterpunkt $(0, 0)$ und möchte zu Ihrem Spielgefährten am Gitterpunkt (n, n). Allerdings sieht sie am Gitterpunkt (k, k), $0 < k < n$, einen leckeren Käse.

i) Finden Sie eine Formel für die Anzahl a_k der Gitterwege, über die Pinky laufen kann, um zu Ihrem Spielgefährten zu kommen und dabei den Käse einzusammeln.
ii) Zeigen Sie, dass $a_k = a_{n-k}$ ist.
iii) Zeigen Sie, dass für $k = 1$ und jedes $n > 1$ mehr als die Hälfte aller Wege am Käse vorbeikommen.

Aufgabe 4: Abzählen *(4+4+2=10 Punkte)*

i) Auf wie viele Möglichkeiten kann man zwei verschiedene Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 100\}$ so auswählen, dass deren Summe eine gerade Zahl ist? Auf wie viele Arten für eine ungerade Summe?
ii) Beweisen Sie die Identität
$$\binom{2n}{2} = 2 \cdot \binom{n}{2} + n^2$$
iii) Gibt es eine Beziehung zwischen den vorigen Aufgabenteilen? Wenn ja, welche?