

## Logik und Diskrete Mathematik

Jens M. Schmidt

Tutoren: Klemens Kapp, David Karcher

**Abgabe:** keine, Lösungen im Tutorium vorstellen und besprechen

### Aufgabe 1: Bergfest

Aus 40 Studenten und 8 Studentinnen (insgesamt also 48 Personen) der Vorlesung ProInformatik 1 soll ein Bergfestkomitee mit 4 Vertretern/-innen gebildet werden.

- i) Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Komitee zu bilden?
- ii) Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Komitee mit gleich vielen Studenten und Studentinnen zu bilden?

### Aufgabe 2: Geometrische Reihe

Sie kennen bereits die geometrischen Reihe: Für jedes  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

- i) Begründen Sie intuitiv, gegen welchen Wert die Summe für  $|x| < 1$  strebt (*konvergiert*), wenn  $n$  gegen unendlich geht.
- ii) Wogegen konvergiert die Summe der unendlichen Folge  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ?

### Aufgabe 3: Binomialkoeffizienten

Wieviele Wörter kann man aus den Buchstaben des Worts MISSISSIPPI bilden? Dabei sollen alle Buchstaben in der gegebenen Vielfachheit verwendet werden. Die Wörter müssen weder eine Bedeutung haben, noch vernünftig aussprechbar sein.

### Aufgabe 4: Sieb des Eratosthenes

Eine natürliche Zahl ist Primzahl, wenn  $n \geq 2$  ist und  $n$  nur durch 1 und sich selbst (ganzzahlig) teilbar ist. Wir möchten alle Primzahlen der Menge  $M = \{2, \dots, 100\}$  abzählen.

- i) Wie viele Zahlen aus  $M$  sind durch 2 und wie viele durch 3 teilbar? Wie viele sind durch eine gegebene Zahl  $k \in \mathbb{N}^+$  teilbar?
- ii) Seien  $k$  und  $l$  zwei teilerfremde Zahlen aus  $\mathbb{N}^+$ . Wie viele Zahlen aus  $M$  sind sowohl durch  $k$  als auch durch  $l$  teilbar?
- iii) Seien  $A$  bzw.  $B$ ,  $C$  und  $D$  die Teilmengen von  $M$  der durch 2 bzw. 3, 5 und 7 teilbaren Zahlen. Begründen Sie, dass die Anzahl der Primzahlen  $P$  in  $M$  sich durch die folgende Formel bestimmen läßt:  $|P| = |M| - |A \cup B \cup C \cup D| + 4$ .
- iv) Bestimmen Sie diese Anzahl durch das Inklusions-Exklusions-Prinzip.
- v) Für die Vereinigung wie vieler Mengen müßte man dieses Prinzip anwenden, um die Anzahl der Primzahlen aus der Menge  $\{2, \dots, 10000\}$  zu bestimmen?