

Logik und Diskrete Mathematik

Jens M. Schmidt

Tutoren: Klemens Kapp, David Karcher

Abgabe: keine, Lösungen im Tutorium vorstellen und besprechen

Aufgabe 1: RelationenSei $M = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ und folgende Relationen in M gegeben:

- i) $a|b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a \cdot c = b$ (a „teilt“ b)
- ii) $aRb \Leftrightarrow a + b < 10$

Stellen Sie die Relationen jeweils als Menge, als Graph mit Knoten und gerichteten Kanten, und als 0/1-Matrix dar. Bestimmen Sie die Verkettungen $| \circ |$, $R \circ R$ sowie die inversen Relationen $|^{-1}$ und R^{-1} in einer Darstellung Ihrer Wahl.

Aufgabe 2: Operationelle CharakterisierungBeweisen Sie, dass eine Relation $R \subseteq A \times A$

- i) genau dann reflexiv ist, wenn $Id_A \subseteq R$,
- ii) genau dann symmetrisch ist, wenn $R^{-1} \subseteq R$,
- iii) genau dann transitiv ist, wenn $R \circ R \subseteq R$.

Hinweis: Schreiben Sie erst die Definitionen von jeweils Id_A und Reflexivität, R^{-1} und Symmetrie, und $R \circ R$ und Transitivität auf.

Aufgabe 3: Ketten und Antiketten

Bestimmen sie eine *längste* Kette (eine Kette mit möglichst vielen Elementen) in der Halbordnung $(\mathcal{P}(\{1, 2, 4, 7\}), \subseteq)$. Finden Sie eine Antikette mit mindestens 5 Elementen.

Aufgabe 4: Funktionen

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität (die Menge \mathbb{N} enthält hier 0).

- i) $f_1 : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ mit $f_1(n) = n + 1$
- ii) $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f_2(n) = n + 1$
- iii) $f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f_3(n) = n^2$
- iv) $f_4 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f_4(n) = n^2$
- v) $f_5 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f_5(n) = n^3$