4. Aufgabenblatt zur Vorlesung SS 2011

Logik und Diskrete Mathematik

Jens M. Schmidt Tutoren: Klemens Kapp, David Karcher

Abgabe: keine, Lösungen im Tutorium vorstellen und besprechen

Aufgabe 1: Paradoxon

Sei $M = \{X | X \notin X\}$, also die „Menge" aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Beweisen Sie den Widerspruch $M \in M \Leftrightarrow M \notin M$.

Hinweis: Benutzen Sie $a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$.

Aufgabe 2: Ein Notfall

Die Insel Berlin bittet um Mithilfe. Das Schmelzen der Polkappen fand doch eher statt als vorausgesagt; der Anstieg der Ozeane kam für alle überraschend. Die Regierung möchte nun einen Notfallplan erstellen, welche der verbleibenden Städte noch auf dem Landweg untereinander erreichbar sind. Man weiß, dass *Erreichbarkeit* eine Relation R in der Menge der verbleibenden Städte S ist und dass sämtliche Einbahnstraßen untergegangen sind.

i) Was für eine Relation ist R? Beweisen Sie Ihre Aussage.

ii) Pro Insel soll genau eine Stadt als temporäres Notlager bestimmt werden. Was entspricht dieser Frage in R?

Aufgabe 3: Kartesisches Produkt und Anzahl von Relationen

i) Welche Kardinalität (auch Mächtigkeit genannt) hat das kartesische Produkt zweier endlicher Mengen?

ii) Sei A eine Menge mit n Elementen. Stellen Sie Formeln für die Anzahl der *reflexiven*, der *symmetrischen* und der *reflexiven und symmetrischen* Relationen in A auf und begründen Sie diese.

iii) Wie viele verschiedene Äquivalenzrelationen gibt es in der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ und warum?

Aufgabe 4: Ein falscher Beweis für eine falsche Aussage

Wir möchten zeigen, dass jede Relation, die symmetrisch und transitiv ist, auch reflexiv ist. Was ist falsch an folgender Argumentation: Wir wählen für ein beliebiges x ein y mit xRy. Wegen der Symmetrie gilt auch yRx und wegen der Transitivität auch xRx.