3. Aufgabenblatt zur Vorlesung SS 2011

Logik und Diskrete Mathematik

Jens M. Schmidt Tutoren: Klemens Kapp, David Karcher

Abgabe: keine, Lösungen im Tutorium vorstellen und besprechen

---

Aufgabe 1: Prädikatenlogik I

Der Gültigkeitsbereich für die Variablen x, y und z in dieser Aufgabe sei auf die positiven (d. h. ohne Null) reellen Zahlen $\mathbb{R}^+$ festgelegt. Dazu sind die folgenden Prädikate gegeben:

$P(x) = 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

$Q(x, y) = 1 \Leftrightarrow x < y$

$R(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z$

Welche Wahrheitswerte haben die folgenden Aussagen?

i) $R(1, 2, 3)$

ii) $Q(3, 2)$

iii) $\exists x\ R(x, x, 3)$

iv) $\exists y \forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(y, x))$

v) $\forall z \exists x \exists y\ (P(z) \Rightarrow P(x) \wedge R(x, y, z)$

vi) $\forall x \forall z \exists y\ R(x, y, z)$

vii) $\forall x \forall z \exists y\ Q(x, z) \Rightarrow R(x, y, z)$

Aufgabe 2: Prädikatenlogik II

Seien n und m zwei ganze Zahlen. Wir nennen m einen *Teiler* von n (n heißt dann durch m *teilbar*), wenn es eine weitere ganze Zahl l gibt mit $n = m \cdot l$. Symbolisch kann man diesen Sachverhalt durch $m|n$ ausdrücken. Eine natürliche Zahl $p \geq 2$ ist eine *Primzahl*, wenn sie außer 1 und sich selbst keinen positiven Teiler hat.

Geben Sie eine formale Beschreibung der folgenden drei Prädikate (Aussagenformen) an, wobei wir als Individuenbereich die Menge der natürlichen Zahlen vereinbaren. Sie dürfen dabei die Quantoren $\forall$ und $\exists$, die Symbole für die Grundrechenarten und logischen Verknüpfungen sowie $=, <, >, \leq$ und $\geq$ verwenden, aber nicht das Teilbarkeitssymbol $|$.

i) $P(n)$: „n ist eine Primzahl“

ii) $Q(n)$: „n ist Potenz einer Primzahl“

iii) $R(n)$: „n hat (mindestens) zwei verschiedene *Primteiler* (Teiler, die Primzahlen sind)“

iv) Versuchen Sie, das Prädikat $R(n)$ zu beschreiben, ohne explizit oder implizit die Primzahldefinition zu verwenden (hier können Sie mit $|$ arbeiten). Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Beschreibung.

Aufgabe 3: Vertauschung von Quantoren

Welche logische Beziehung besteht zwischen den Aussagen

$$\exists x \, \forall y \; P(x, y)$$

und

$$\forall y \, \exists x \; P(x, y)?$$

Folgt eine Aussage aus der anderen, oder sind die beiden Aussagen sogar äquivalent? Wenn ja, begründen Sie Ihre Antwort. Wenn nein, geben Sie ein Prädikat $P(x, y)$ an, bei dem die Beziehung nicht gilt.

Aufgabe 4: Kanonische DNF und KNF

Sei $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \times \cdots \times \mathbb{B}$ das n-fache kartesische Produkt, welches wir auch mit $\mathbb{B}^n$ abkürzen. Wir betrachten die n-stellige Boolesche Funktion $f(n) : B^n \to B$, die den Wert 1 annimmt, wenn mindestens die Hälfte der Eingabeparameter aus Einsen besteht. Dies ist die n-stellige *Majoritätsfunktion*.

i) Geben Sie die Wertetabelle der 3-stelligen Majoritätsfunktion an.

ii) Leiten Sie aus der Wertetabelle die kanonische disjunktive Normalform $dnf(f_3)$ und die kanonische KNF $knf(f_3)$ ab.