

## Logik und Diskrete Mathematik

Jens M. Schmidt

Tutoren: Klemens Kapp, David Karcher

**Abgabe:** keine, Lösungen im Tutorium vorstellen und besprechen

---

### Aufgabe 1: Avatar

- i) Sie stehen vor einer Weggabelung, ein Weg führt in eine (auf jeden Fall tödliche) Falle, der andere ist sicher und man munkelt, ein "Schatz" oder auch "Schein" warte an seinem Ende. An der Gabelung stehen zwei Wächter, von denen einer immer lügt und einer immer die Wahrheit sagt. Die Wächter machen Ihnen klar, dass sie genau eine Frage stellen dürfen, um den sicheren Weg herauszufinden. Diese muss mit JA oder NEIN zu beantworten sein. Wie formulieren Sie die Frage?
- ii) (schwer) Sie gehen ein Stück weiter und suchen neue Herausforderungen, nachdem Sie die beiden Wächter mit einer gewissen Eleganz überlistet haben. Als bald geraten Sie erneut an eine Gabelung, an der diesmal drei Wächter warten: Einer lügt immer, einer sagt immer die Wahrheit und einer antwortet völlig zufällig. Sie dürfen ihnen jetzt zwei JA/NEIN-Fragen stellen, wahlweise beide an einen Wächter oder an zwei verschiedene. Welche stellen Sie, um an den Schatz zu kommen?

### Aufgabe 2: Boolesche Formeln

Vereinfachen Sie die folgenden booleschen Formeln Schritt für Schritt unter Verwendung der aus der Vorlesung bekannten semantischen Äquivalenzen.

- i)  $((a \vee b) \wedge (c \Rightarrow a)) \vee ((a \Leftrightarrow c) \vee b)$
- ii)  $(a \Rightarrow b \wedge c) \wedge (b \Rightarrow a \wedge c) \wedge (c \Rightarrow a \wedge b)$

### Aufgabe 3: Antivalenz

Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen, dass die Antivalenz (auch bekannt als XOR-Verknüpfung) kommutativ und assoziativ ist.

### Aufgabe 4: Boolesche Funktionen

Geben Sie einen formal exakten Beweis für die folgende Tatsache mittels Fallunterscheidung. Sei  $f$  eine beliebige  $n$ -stellige Boolesche Funktion. Dann gilt für jede Variable  $x_i$  mit  $1 \leq i \leq n$ :

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, \dots, x_n) \vee \neg x_i \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, x_n)$$