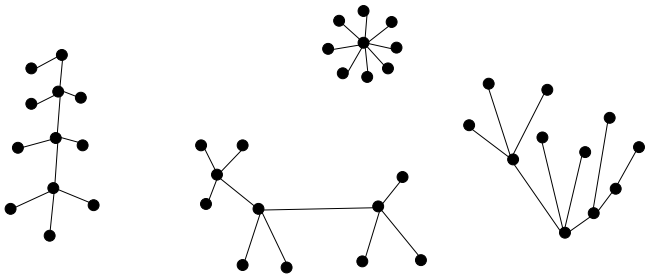
Bäume und Wälder

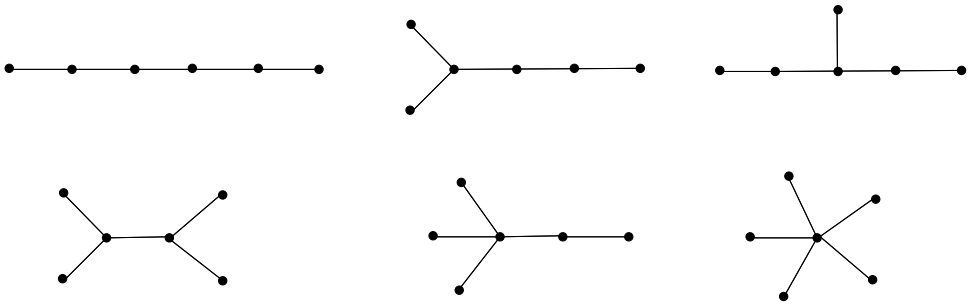
Definition und Eigenschaften

Definition: Ein (ungerichteter) Graph ist ein *Baum*, wenn er zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält.
Ein (ungerichteter) Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind, wird ein *Wald* genannt, d.h. jeder kreisfreie Graph ist ein Wald.

Beispiel 1: Die folgende Abbildung zeigt einen aus vier Bäumen bestehenden Wald.



Beispiel 2: Die folgende Abbildung zeigt die Liste aller Bäume mit 6 Knoten.



Übung: Man mache sich klar, warum diese Bäume paarweise nichtisomorph sind!

Definition: Sei $G = (V, E)$ ungerichtet und zusammenhängend mit $|V| = n$. Ein Untergraph T auf allen n Knoten, der ein Baum ist, heißt *aufspannender Baum* von G.
Analog definiert man einen *aufspannenden Wald* als Vereinigung von aufspannenden Bäumen von allen Zusammenhangskomponenten eines nichtzusammenhängenden Graphen.

Beobachtung: Jeder zusammenhängende Graph G hat einen aufspannenden Baum, dieser ist aber nur eindeutig, wenn der Graph selbst ein Baum ist, denn dann ist T der Graph selbst. Ist G kein Baum, dann gibt es einen Kreis in G und wenn man eine Kante dieses Kreises aus E entfernt, bleibt der Graph zusammenhängend. Somit

kann man einen aufspannden Baum von G erzeugen, indem man schrittweise Kanten von Kreisen entfernt bis keine Kreise mehr existieren.

Lemma: Jeder Baum mit zumindest zwei Knoten besitzt mindestens zwei Knoten vom Grad 1.

Beweis: Angenommen $G = (V, E)$ ist ein Baum und hat keinen Knoten vom Grad 1, dann haben alle Knoten einen Grad ≥ 2. Wir beginnen mit einer beliebigen Kante $\{v_1, v_2\} \in E$. Wegen $deg(v_2) \geq 2$ gibt es einen von v_1 verschiedenen Nachbarn v_3 von v_2, wegen $deg(v_3) \geq 2$ gibt es einen von v_2 verschiedenen Nachbarn v_4 von v_3 usw. Man beachte, dass jeder Knoten v_k aus dieser Konstruktion nicht in der Menge $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ liegen kann, denn dann hätte G einen Kreis. Damit müsste V unendlich viele Knoten enthalten - ein Widerspruch.

Charakterisierung von Bäumen

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent für $G = (V, E)$.

(1) $G = (V, E)$ ist ein Baum.

(2) Je zwei Knoten sind durch genau einen Weg verbunden.

(3) G ist zusammenhängend und es gilt: $|E| = |V| - 1$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) und (2) $\Rightarrow$ (1) sind einfache indirekte Schlüsse. Die erste Implikation sieht man z.B. wie folgt. Angenommen es gibt zwei Knoten u, v, zwischen denen nicht genau ein Weg verluft.Dies knnte kein Weg sein, dann ist der Graph nicht zusammenhngend, oder mindestens zwei Wege, dann entsteht ein Kreis. In jedem Fall ist aber G kein Baum.
Wir zeigen (1) $\Rightarrow$ (3):

Zunächst hat jeder Baum Knoten vom Grad 1, diese nennt man *Blätter*. Das sieht man wie folgt. Seien $u_1, u_2, \ldots, u_i$ die Knoten eines längsten Weges in G. Alle Nachbarn von u_1 liegen auf diesem Weg, sonst wäre er nicht längster Weg. Nur u_2 kann Nachbar sein, sonst gäbe es einen Kreis.
Wir entfernen u_1 und die Kante $\{u_1, u_2\}$ aus G und erhalten einen zusammenhängenden Restgraphen G'. Dieser hat genau einen Knoten und eine Kante weniger als G. Wenn wir dies iterieren, bleibt zum Schluss genau ein Knoten ohne Kanten übrig. Also $|E| = |V| - 1$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $T = (V, E')$ aufspannender Baum von G, damit $|V| - |E'| = 1$. Aber nach Vorraussetzung gilt auch $|V| - |E| = 1$. Allerdings ist $E' \subseteq E$ und die einzige Möglichkeit hierfür ist $E = E'$.

Grundidee von Breiten- und Tiefensuche

Zur Konstruktion von aufspannenden Bäumen mit speziellen Eigenschaften gibt zwei Standardverfahren, die Breitensuche (BFS - Breadth-first search) und die Tiefensuche (DFS -Depth-first search).
Beide Algorithmen starten von einem vorher (beliebig) festgelegten Knoten $r \in V$, der sogenannten Wurzel, und besuchen in jedem Schritt von einem bereits erreichten Knoten aus einen benachbarten, aber noch nicht besuchten Knoten. Die Kanten, über die diese Besuche erfolgen, bilden den aufspannenden Baum.

Die beiden Verfahren unterscheiden sich dadurch, von welchem der jeweils erreichten Knoten die Suche fortgesetzt wird. Dazu betrachten wir die aktuelle Reihenfolge in der die Knoten besucht wurden. Bei der Breitenssuche wählt man als aktuellen Ausgangspunkt den ersten Knoten in dieser Folge, der einen unbesuchten Nachbarn besitzt, bei der Tiefensuche den letzten. Falls dieser Ausgangspunkt mehrere unbesuchte Nachbarn besitzt, kann man einen beliebigen auswählen oder sich bei nummerierten Knoten auf den kleinsten festlegen.
Es ist klar, dass beide Verfahren in einem (möglicherweise unzusammenhängenden) Graphen G einen aufspannenden Baum für die Zusammenhangskomponente der Wurzel liefern. Durch Wiederholung auf allen Zusammenhangskomponenten (jeweils mit einer neuen Wurzel) erhält man einen aufspannenden Wald.