**Mathematik für Informatiker II** **SS09**

**8. Übung** **Abgabe 19.06.09 bis 14:00 Uhr**

**Aufgabe 1** **Stetigkeit** $3+2$ **Punkte**

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ **nicht** gleichmäßig stetig ist.
Hinweis: Sie können z.B. argumentieren, dass es für $\epsilon = 1$ kein passendes $\delta > 0$ gibt, so dass ..., d.h. sie müssen für ein beliebiges $\delta > 0$ zwei Stellen $x, x'$ finden, so dass ....

b) Zeigen Sie **anhand der Definition**, dass die Funktion $f(x) = x^2$ gleichmäßig stetig auf dem Intervall $[-100, 100]$ ist.

**Aufgabe 2** **stetige Ergänzung** $3+2+2$ **Punkte**

Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen, welche Lücken sich Definitionsbereich ergeben, wenn man alle reellen Zahlen zu Grunde legt, und stellen Sie fest, welche dieser Lücken sich durch stetige Ergänzung beheben lassen.

- $f(x) = \frac{x^2}{\tan x}$
- $g(x) = \frac{|x|}{\sin x}$
- $h(x) = \frac{x}{\ln |x|}$

**Aufgabe 3** ***O*–Notation** $5$ **Punkte**

Ordnen Sie die folgenden Funktionsterme aufsteigend nach ihrem asymptotische Wachstum, d.h. wenn $f$ vor $g$ steht, muss $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ gelten. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung, aus der ersichtlich wird, welche Umformungen und Regeln angewendet wurden.

$$f_1(n) = (2n)^2 \qquad f_2(n) = \log_2\left((n!)^2\right) \qquad f_3(n) = \log_2\left((n^2)!\right)$$

$$f_4(n) = (\log_2 n)^{\log_2 n} \qquad f_5(n) = 9^{\log_3 n} \qquad f_6(n) = 3^{\log_2 n}$$

Markieren Sie alle Abschnitte der Ordnung, deren Funktionen das gleiche asymptotische Wachstum haben (d.h. $f(n) = \Theta(g(n))$ )

**Aufgabe 4** **Definition der O-Notation** $4$ **Punkte**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr für alle Funktionen $f_1, f_2, g_1, g_2, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$?
Begründen Sie positive Antworten anhand der Definitionen und negative Antworten durch geeignete Gegenbeispiele.

a) Aus $f_1(n) \in \mathcal{O}(g_1(n))$ und $f_2(n) \in o(g_2(n))$ folgt $g_1(n) \cdot g_2(n) \in \omega(f_1(n) \cdot f_2(n))$

b) Aus $f_1(n) \in \mathcal{O}(g_1(n))$ und $f_2(n) \in o(g_2(n))$ folgt $f_1(n) + f_2(n) = o(g_1(n) + g_2(n))$