Mathematik für Informatiker II **SS09**

7. Übung **Abgabe am 12.06.09 bis 14:00 Uhr**

Aufgabe 1 **Reihen** $4+2$ **Punkte**

a) Es sei $M = \{2^k \cdot 3^l \mid k, l \in \mathbb{N}\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, die sich als ein Produkt aus Zweien und Dreien darstellen lassen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ die Folge, welche die Elemente aus M aufsteigend geordnet aufzählt, d.h. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 6, a_6 = 8, a_7 = 9, a_8 = 12, \ldots$

Wir bezeichnen mit $b_i = \frac{1}{a_i}$ die Folge der Inversen. Zeigen Sie, dass die zugehörige Reihe $s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

Hinweis: Die Monotonie ist offensichtlich, eine obere Schranke kann man durch geschickte Gruppierung der Summanden nachweisen.

b) Es sei M' die Menge der positiven ganzen Zahlen, die durch 2 und durch 3 teilbar sind, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ die Folge, welche die Elemente aus M' aufsteigend geordnet aufzählt und $d_i = \frac{1}{c_i}$ die Folge der Inversen. Zeigen Sie, dass die zugehörige Reihe $t_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$ nicht konvergiert.

Aufgabe 2 ***e*-Grenzwerte** $2+2+3$ **Punkte**

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$:

- $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{2n+1}$
- $b_n = \left(\dfrac{n^2+3}{n^2}\right)^{2n^2}$
- $c_n = \left(\dfrac{2n^2+n}{2n^2-2n}\right)^{2n}$

Aufgabe 3 **Grenzwerte der Sinusfunktion** 6 **Punkte**

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen an den bezeichneten Stellen:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x^2+4}-2}{\sin^2 x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2x^3)}{12x^5 \sin x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^3+3x^2}$

Aufgabe 4 **Asymptoten von rationalen Funktionen** 5 **Punkte**

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und **alle** Asymptoten der folgenden rationalen Funktion $f(x)$. Untersuchen Sie dabei das Grenzverhalten an den Polstellen von beiden Seiten.

$$f(x) = \frac{2x^3+3x^2-x-2}{x^2-x-2}$$