

Aufgabe 1**Bestimmte Divergenz** **$3 \times 3 + 1$ Punkte**Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei Folgen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \neq 0) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$$

Begründen Sie die folgenden Konvergenzen und bestimmten Divergenzen an Hand der Definitionen.

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = 0 \qquad b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot c_n = \infty \qquad c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{|b_n|} = \infty$$

d) Warum sind die Betragsstriche in c) wichtig? Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die Aussage von c) ohne Betragsstriche falsch ist!

Hinweis: Verwenden Sie zur Begründung die folgenden Definitionen.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x &\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \quad |x_n - x| < \epsilon \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty &\iff \forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \quad y_n > K \end{aligned}$$

Aufgabe 2**Grenzwerte** **5×3 Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und kommentieren Sie die dazu verwendeten Grenzwertregeln:

$$\begin{aligned} a) \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 5}{(2n - 1)(6n^2 - 4)} \\ b) \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n - 1} - \frac{n^2 + 1}{n + 1} \right) \\ c) \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{9n + 5} - \sqrt{4n - 3}}{\sqrt{2n}} \right) \\ d) \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right) \\ e) \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^{2n+3} \cdot n^2} \end{aligned}$$