Mathematik für Informatiker II **SS09**

5. Übung **Abgabe am 25.05.09 bis 10:00 Uhr**

Aufgabe 1 **Rationale Funktionen** **4 Punkte**

Bestimmen Sie für die folgende rationale Funktion $f(x)$ die gekürzte Darstellung (durch Verwendung des Euklidischen Algorithmus!), den Definitionsbereich und die Vielfachheit der Polstellen.

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1}$$

Aufgabe 2 **Lagrange–Interpolation I** **4 Punkte**

Bestimmen Sie mit der **Lagrange–Interpolation** ein komplexes Polynom $p(z)$ vom Grad 2 mit den folgenden Eigenschaften:

$$p(-1) = 2i \qquad p(1) = 4 \qquad p(i) = 1 + 3i$$

Hinweis: Bilden Sie bei der Addition der Hilfspolynome einen Hauptnenner, der eine ganze Zahl ist. Vergewissern Sie sich durch eine Probe von der Richtigkeit Ihrer Lösung.

Aufgabe 3 **Lagrange–Interpolation II** **4 Punkte**

Das reelle Polynom $p(x) = x^5 - 10x^3 - 3x^2 - 6$ hat an der Stelle 3 den Wert $p(3) = -60$. Bestimmen Sie ein Polynom $q(x)$ vom Grad ≤ 5, das an den Stellen $x = -2, -1, 0, 1, 2$ mit $p(x)$ übereinstimmt und an der Stelle 3 den Wert $q(3) = 60$ hat.

Hinweis: Nicht gleich losrechnen, sondern erst nachdenken! Wer es clever macht, muss nur eines von den 6 Hilfspolynomen ausrechnen.

Aufgabe 4 **Newton–Interpolation** **4 Punkte**

Bestimmen Sie mit der Newton–Interpolation ein Polynom $p(x)$ vom Grad ≤ 4, dessen Werteverlauf mit der folgenden Tabelle übereinstimmt.

x	-1	0	1	2	3
$p(x)$	-7	-4	-5	2	53

Aufgabe 5 **Polynom Interpolation – Anwendungen** **2 + 2 + 4 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass es kein Polynom vom Grad 4 gibt, dessen Graph die Parabel $y = 3x^2 - x + 3$ mehr als viermal schneidet.

b) Zeigen Sie, dass es kein Polynom vom Grad 4 gibt mit $p(0) = 0$, $p(-1) = p(1) = 1$, $p(-2) = p(2) = 16$ und $p(3) = 27$.

c) Ein Polynom $p(x)$ wird symmetrisch genannt, wenn $p(r) = p(-r)$ für alle reellen Zahlen $r \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$ dann und nur dann symmetrisch ist, wenn $a_1 = a_3 = 0$ erfüllt ist.
Hinweis: Eine Richtung ist sehr einfach, für die andere kann man ein Polynom $q(x)$ vom Grad 2 nutzen mit $q(0) = p(0)$, $q(1) = p(1)$ und $q(4) = p(2)$.