Mathematik für Informatiker II **SS09**

2. Übung **Abgabe am 04.05.09 bis 18:00 Uhr**

Aufgabe 1 **Ringe** 4 **Punkte**

Sei $(R, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit 1. Bezeichne 0 das $\oplus$-neutrale Element in R und $-a$ das jeweils $\oplus$-inverse Element zu einem $a \in R$.
Zeigen Sie, dass dann für beliebige $a \in R$ die Gleichung $(-1) \cdot (-a) = a$ erfüllt ist. Kommentieren Sie dabei, welche Ring-Eigenschaften in den einzelnen Schritten genutzt werden, d.h. (G1) bis (G3) der Gruppe $(R, \oplus)$, (G1) und (G2) des Monoids $(R, \odot)$, Kommutativität von $\oplus$ und $\odot$, das Distributivgesetz oder eine in der Vorlesung bewiesene Eigenschaft (Skript Seite 4 und 5).

Aufgabe 2 **Rationale und reelle Zahlen** $1 + 2 + 3$ **Punkte**

Bestimmen Sie für die folgenden periodischen Dezimalbrüche Darstellungen als **gekürzte** Brüche aus ganzzahligen Zählern und Nennern. Verwenden Sie den Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung der gekürzten Darstellung. Die einzelnen Schritte des Euklidischen Algorithmus' sollten dargestellt werden, die Ausführung der ganzzahligen Divisionen kann man einem Taschenrechner oder Haskell überlassen.

a) $q_1 = 5,\overline{18}$ *b)* $q_2 = 0,51\overline{037}$ *c)* $q_3 = 1,2\overline{428571}$

Aufgabe 3 **obere und untere Grenzen** $3 + 3 + 2 + 2$ **Punkte**

Seien C und D beliebige nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Wir erweitern die übliche Addition und Multiplikation zu Operationen auf Teilmengen wie folgt:

- $C + D = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists x \in C \; \exists y \in D \quad r = x + y\}$
- $a + C = \{a\} + C = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists x \in C \quad r = a + x\}$
- $C \cdot D = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists x \in C \; \exists y \in D \quad r = x \cdot y\}$
- $a \cdot C = \{a\} \cdot C = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists x \in C \quad r = a \cdot x\}$
- $-C = \{-1\} \cdot C = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists x \in C \quad r = -x\}$

Bergründen Sie anhand der Definitionen von oberen (bzw. unteren) Schranken und Grenzen die folgenden Aussagen:

a) Ist $a > 0$ und besitzt C eine obere Grenze, dann besitzt auch $a \cdot C$ eine obere Grenze und es gilt: $sup(a \cdot C) = a \cdot sup(C)$

b) Besitzt C eine obere Grenze, dann besitzt $-C$ eine untere Grenze und es gilt
$inf(-C) = -sup(C)$

c) Sind C und D von oben beschränkt (d.h. sie haben eine obere Schranke), dann ist auch $C + D$ von oben beschränkt. Finden Sie ein Beispiel, dass sich diese Eigenschaft nicht auf $C \cdot D$ übertragen lässt.

d) Sind C und D beide von oben und unten beschränkt, dann ist auch $C \cdot D$ von oben und unten beschränkt.