Mathematik für Informatiker II SS 2006

Nachklausur 18.09.2006

Name: ....

Matrikelnummer: ....

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Gesamt
Punkte	/8	/9	/6	/7	/30

Tutor

☐ Swantje Gährs ☐ Dimitar Kroushkov ☐ Andrea Wiese ☐ Dana Woitas ☐ alte Zulassung

---

Studiengang ☐ Bachelor Informatik ☐ Diplom Informatik ☐ Sonstiges bitte nennen:

Ich bin einverstanden, dass meine Matrikelnummer mit dem erreichten Ergebnis

auf eine FU-internen Web-Seite erscheint: ☐ **Ja** ☐ **Nein**

Wichtige Hinweise:

1) Bitte den Namen und die Matrikelnummer auf dem Deckblatt und auf allen Zusatzblättern eintragen!

2) Die Lösung der Aufgaben sollte möglichst auf dem entsprechenden Zettel oder seiner Rückseite zu finden sein. Bitte einen Hinweis auf dem Aufgabenblatt geben, wenn weitere Teile der Lösung auf einem Zusatzblatt stehen. Für verschiedene Aufgaben sollten auch verschiedene Zusatzblätter verwendet werden.

3) Die Lösungswege sind zu begründen, auch Rechnungen und Umformungen sollten kurz kommentiert werden. Natürlich können in den Begründungen alle in der Vorlesung bewiesenen Fakten und Sätze verwendet werden.

4) Hilfsmittel sind nicht zugelassen. Sie die können die Grundintegrale sowie die Werte von Sinus- und Cosinusfunktion aus der folgenden Tabelle nutzen.

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \qquad \text{für } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c \qquad \text{für } x \neq 0$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + c \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \operatorname{arsinh} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| = \operatorname{arcosh} x + c \qquad \text{für } |x| > 1$$

$\sin 0 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \frac{\pi}{2} = \cos 0 = 1$

Aufgabe 1: **Polynome und komplexe Zahlen** $3 + 2 + 3$ **Punkte**

a) Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ vom Grad ≤ 3 mit den folgenden Eigenschaften:

$$p(-1) = -2, \qquad p(0) = 2, \qquad p(1) = 0, \qquad p(2) = 4$$

b) Es sei $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom vom Grad 2. Zeigen Sie, dass es kein Polynom $r(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad 4 gibt, dessen Graph den Graphen von $q(x)$ in 6 Punkten schneidet.

c) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, welche die folgenden zwei Eigenschaften haben:

$$\overline{z} = i \cdot z \qquad \text{und} \qquad z \cdot \overline{z} = 4$$

Geben Sie die Lösung(en) sowohl in kartesischen als auch in Polarkoordinaten an!

Aufgabe 2: **Grenzwerte** $3+3+3$ **Punkte**

a) Formulieren Sie das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz einer Folge. und nutzen Sie dieses Kriterium um zu zeigen, dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die **keine** Nullfolge ist, die zugehörige Reihe $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$ **nicht** konvergiert.

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

b) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{8^{n+\log_2 n}}$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^3 x - 1}{x \cdot \sin x}$$

Aufgabe 3: **Extremstellen** 6 **Punkte**

Wir betrachten einen Punkt $P(t)$, der sich im Zeitintervall $t \in [0, \pi]$ in der Ebene bewegt, so dass zum Zeitpunkt t die x-Koordinate von $P(t)$ den Wert $x(t) = \cos t$ und die y-Koordinate den Wert $y(t) = \sin^2 t$ hat. Beachten Sie das Quadrat beim Sinus, ohne Quadrat wäre es ein Halbkreis!
Bestimmen Sie den minimalen Abstand von $P(t)$ zum Koordinatenursprung und alle Zeitpunkte $t \in [0, \pi]$ zu denen dieser minimale Abstand erreicht wird.
Hinweis: Der Abstand ist genau dann minimal, wenn auch der quadratische Abstand minimal ist.

Aufgabe 4: **Integration** $4+3$ **Punkte**

Berechnen Sie das bestimmte Integral in a) mit Hilfe der Substitution $t = x^2$ und das unbestimmte Integral in b) mit partieller Integration.

$a)\quad \int_0^{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{dx} \qquad\qquad b)\quad \int 3x^2 \cdot e^{3x}\,\mathrm{dx}$