Musterlösung zur Klausur Mafi 2 vom 14.07.2009

Aufgabe 1: **Polynome und komplexe Zahlen** **4 + 2 + 4 Punkte**

In der folgenden Tabelle sind 6 Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben.

Punkt	A	B	C	D	E	A'
Koordinaten	$(-2,-8)$	$(-1,3)$	$(0,2)$	$(1,1)$	$(2,12)$	$(-2,5)$

a) Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ vom Grad ≤ 3 dessen Graph durch die vier Punkte A, B, C und D verläuft!

b) Gibt es ein Polynom $q(x)$ vom Grad ≤ 3 dessen Graph durch die fünf Punkte A, B, C, D und E verläuft und gibt es ein Polynom $r(x)$ vom Grad ≤ 3 dessen Graph durch die fünf Punkte A', B, C, D und E verläuft?

c) Bestimmen Sie ein reelles Polynom $s(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad ≤ 3 mit den folgenden Eigenschaften: $s(1) = -12$ und $s(x)$ hat die reelle Nullstelle $a = -2$ sowie die komplexe Nullstelle $z = 1 + i\sqrt{2}$.

a) Newton-Verfahren

$$\begin{array}{ccccccc}
-2 & -8 & & & & & \\
 & & 11 & & & & \\
-1 & 3 & & -6 & & & \\
 & & -1 & & 2 & & \\
0 & 2 & & 0 & & & \\
 & & -1 & & & & \\
1 & 1 & & & & &
\end{array}$$

$$p(x) = -8 + 11(x+2) - 6(x+2)(x+1) + 2(x+2)(x+1)\cdot x$$
$$= 2x^3 + (-6+6)x^2 + (11-18+4)x - 8 + 22 - 12$$
$$= 2x^3 - 3x + 2$$

b) • $p(2) = 16 - 6 + 2 = 12 \Longrightarrow q(x) = p(x)$ existiert

• $r(x)$ existiert nicht, denn das Polynom $p(x)$ ist das <u>einzige</u> vom Grad ≤ 3, das durch die Punkte B, C, D, E verläuft, aber $p(-2) = -8 \neq 5$

c) $s(x)$ muss auch die Nullstelle $\bar{z} = 1 - i\sqrt{2}$ haben.

$$\Rightarrow \quad s(x) = b \cdot (x+2)(x-(1+i\sqrt{2}))(x-(1-i\sqrt{2}))$$

$$= b\,(x+2)(x^2 - 2x + z \cdot \bar{z})$$

$$\Big| \; z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 3$$

$$= b\,(x^3 + x^2(2-2) + x(3-4) + 6)$$

$$= b\,(x^3 - x + 6)$$

$$s(1) = b\,(1 - 1 + 6) = b \cdot 6 = -12$$

$$\Rightarrow \quad b = -2$$

$$\Rightarrow \quad s(x) = -2x^3 + 2x - 12$$

Aufgabe 2: **Grenzwerte** $4+4$ **Punkte + 3 Zusatzpunkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Machen Sie deutlich an welcher Stelle Sie welche Grenzwertregeln verwenden!

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)^{2n}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\sin^2 x}{x^3}$

c) **Zusatzaufgabe:** Untersuchen Sie die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^2}{4n^3+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz!

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n^2+n}\right)^{2n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{2(n+1)-2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$\cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-2}$

$= e^{-1}\cdot e^{-1}\cdot 1 = e^{-2}$

Produktregel + e-Grenzwert

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\sin^2 x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2$

Produktregel

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}\cdot 1^2$

Bernoulli – L'Hospital

$= 2$

c) Die Aufgabe sollte eigentlich $\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{4k^3+1}$ heißen!

Variante 1, so wie gedruckt:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{4n^3+1} = (n+1) \cdot \frac{n^2}{4n^3+1} = \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(4+\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^3}\left(4+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{4}$$

Quotientenregel

Variante 2, so wie gedacht:

$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{4k^3+1}$ konvergiert <u>nicht</u>!

Begründung durch Vergleich mit harmonischer Reihe:

$$\frac{k^2}{4k^3+1} \geq \frac{k^2}{5k^3} = \frac{1}{5k} \quad \text{für alle } k \geq 1$$

Konvergenz der Reihe würde Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k}$ und damit Konvergenz der harmonischen Reihe implizieren, aber

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Aufgabe 3: **Extremstellen** **5 + 3 Punkte**

Für jeden rellen Wert $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die durch $f_a(x) = e^{x+a} + e^{-e \cdot x}$ definiert ist.

a) Zeigen Sie, dass jede dieser Funktionen genau ein lokales Extremum hat und bestimmen Sie die Stelle, an der dieses Extremum auftritt.

b) Zeigen Sie, dass jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Extremstelle einer Funktion f_a sein kann, wenn a geeignet gewählt wurde. Für welchen Wert a liegt das Extremum von f_a an der Stelle $x = 1$?

a) $f_a'(x) = \left(e^{x+a} + e^{-ex}\right)' = e^{x+a} - e \cdot e^{-ex}$

$= e^{x+a} - e^{-ex+1}$

$f_a'(x) = 0 \iff e^{x+a} = e^{-ex+1}$

$\iff x + a = -ex + 1$

$\iff (1+e)x = 1 - a$

$\iff x = \frac{1-a}{1+e}$

$\Longrightarrow$ höchstens eine Extremstelle bei $x = \frac{1-a}{1+e}$

Wegen $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \infty = \lim_{x \to -\infty} f_a(x)$ und Stetigkeit muss $f_a(x)$ ein globales Minimum haben.

b) Wenn die Extremstelle bei x_0 auftreten soll, muss $x_0 = \frac{1-a}{1+e}$ sein. Das ist für $a = 1 - (1+e) \cdot x_0$ erfüllt.

Insbesondere liegt für $a = -e$ die Extremstelle bei $x_0 = 1$.

Aufgabe 4: **Integration** **4 + 4 Punkte**

Berechnen Sie das bestimmte Integral in a) mit Hilfe der Substitution $t = x^3$ und das unbestimmte Integral in b) mit partieller Integration.

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt[6]{3}} \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{dx}$ b) $\displaystyle\int x \cdot (\ln x)^2\,\mathrm{dx}$

a) $t = x^3 \qquad dt = 3x^2 dx$

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\arctan t + C = \frac{1}{3}\arctan x^3 + C$

- $\displaystyle\int_0^{\sqrt[6]{3}} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \left(\frac{1}{3}\arctan x^3\right)\Big|_0^{\sqrt[6]{3}}$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan 0\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$

b) $\displaystyle\int x(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \int x \ln x\, dx \overset{(*)}{=}$

$u'(x) = x \qquad v(x) = (\ln x)^2$
$u(x) = x^2/2 \qquad v'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$

$u'(x) = x \qquad v(x) = \ln x$
$u(x) = x^2/2 \qquad v'(x) = \dfrac{1}{x}$

$\displaystyle \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \int \frac{x^2}{2x}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}x^2\left((\ln x)^2 - \ln x\right) + \frac{x^2}{4} + C$