

# Kapitel 5

## Integration

### 5.1 Stammfunktionen

**Definition:** Eine auf dem Intervall  $I$  differenzierbare Funktion  $F$  ist eine Stammfunktion der Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in I$ .

**Fakt 1:** Sind  $F_1$  und  $F_2$  Stammfunktionen von  $f$ , dann gilt  $F_1(x) = F_2(x) + c$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  und alle  $x \in I$ .

**Definition:** Die Menge aller Stammfunktionen von  $f$  wird das unbestimmte Integral von  $f$  genannt und mit  $\int f(x)dx = F(x) + c$  bezeichnet.

Während wir Fakt 1 bereits als Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung kennen, wird der folgende Fakt 2 erst später als Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bewiesen.

**Fakt 2:** Jede über einem offenen Intervall stetige Funktion  $f$  besitzt eine Stammfunktion, d.h. das unbestimmte Integral  $\int f(x)dx$  existiert.

Die Bestimmung einer Stammfunktion  $F(x)$  einer gegebenen Funktion  $f(x)$  nennt man Integration. Im Gegensatz zum Differenzieren, das sich in den meisten Fällen mit relativ einfachen Grundregeln durchführen lässt, ist das Integrieren häufig eine sehr komplizierte Aufgabe, zu deren Lösung ein Vorrat an Grundintegralen notwendig ist. Die Grundintegrale aus der folgenden Tabelle kennt man von den Ableitungen verschiedener Standardfunktionen.

$$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \neq -1) \quad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad (x \neq 0) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$f(x) = e^x \quad \int e^x dx = e^x + c$$

$$f(x) = \sin x \quad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$f(x) = \cos x \quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1) \quad \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + c \quad (*)$$

$$f(x) = \sinh x \quad \int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$f(x) = \cosh x \quad \int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{arsinh} x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| = \operatorname{arcosh} x + c$$

Das mit (\*) gekennzeichnete Grundintegral wurde bisher noch nicht behandelt, kann aber durch Ableiten der Stammfunktion leicht überprüft werden.

## 5.2 Integrationsregeln

Die meisten Integrationsmethoden, die in dieser Vorlesung behandelt werden, ergeben sich durch die Umkehrung der bekannten Differentiationsregeln.

### Linearität des Integrals

**Satz:** Für beliebige (über einem Intervall  $I$ ) integrierbare Funktionen  $f$  und  $g$  und Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) dx = a \cdot \int f(x) dx + b \cdot \int g(x) dx$$

### Partielle Integration

Diese Integrationsmethode basiert auf der Umkehrung der Produktregel der Differentiation:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \iff \quad f'(x) \cdot g(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f(x) \cdot g'(x)$$

Durch Integration auf beiden Seiten der rechten Gleichung erhält man die folgende Regel.

**Satz:** Für beliebige (über einem Intervall  $I$ ) differenzierbare Funktionen  $u$  und  $v$  gilt

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

### Beispiele:

$$1) \quad \underbrace{\int x e^x dx}_{u'(x)=e^x, v(x)=x} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = (x-1)e^x + c$$

$$2) \quad \underbrace{\int x^2 \sin x dx}_{u'(x)=\sin x, v(x)=x^2} = -x^2 \cos x + \underbrace{\int 2x \cos x dx}_{u'(x)=\cos x, v(x)=2x} \\ = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx = (2-x^2) \cos x + 2x \sin x + c$$

3) Mit dem Ansatz  $u'(x) = 1$ ,  $u(x) = x$  kann man als Spezialfall der partiellen Integration die folgende Regel aufstellen:  $\int v(x) dx = x \cdot v(x) - \int x \cdot v'(x) dx$ . Insbesondere hilft dieser Ansatz bei den folgenden Integralen:

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$4) \quad \underbrace{\int \sin^2 x dx}_{u'(x)=\sin x, v(x)=\sin x} = -\cos x \sin x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} dx = -\cos x \sin x + \int dx - \int \sin^2 x dx \\ \implies \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + c$$

### Substitutionsmethode

Integration mit Substitution geht auf die Umkehrung der Kettenregel zurück:

$$[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \implies \quad \int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \quad \implies \\ \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c \quad \text{wobei } F(x) \text{ eine Stammfunktion von } f(x) \text{ ist.}$$

Die Substitutionsmethode wird in zwei verschiedenen Varianten verwendet, einer direkten Anwendung der obigen Formel und einer Variante, bei der Umkehrfunktionen angewendet werden. Beide Varianten werden hier durch eine Abfolge formaler Schritte zur Berechnung einer Stammfunktion beschrieben.

**Variante 1:** Direkte Berechnung von  $\int f(g(x))g'(x) dx$ .

1. Schritt: Substitution  $g(x) = t$  und  $g'(x) dx = dt$ .

2. Schritt: Berechnung einer Stammfunktion  $\int f(t) dt = F(t) + c$ .

3. Schritt: Rücksubstitution  $t = g(x)$  und  $F(t) = F(g(x))$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + c = F(g(x)) + c$$

### Beispiele:

$$1) \quad \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |g(x)| + c \quad (g(x) \text{ differenzierbar und } g(x) \neq 0)$$

$$2) \quad \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{(\ln x)^3}{3} + c$$

$$3) \quad \int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{\sin x} + c$$

**Variante 2:** Berechnung von  $\int f(x) dx$  mit einer umkehrbaren Funktion  $g(x)$ .

1. Schritt: Substitution  $x = g(t)$  und  $dx = g'(t) dt$ .

2. Schritt: Berechnung einer Stammfunktion  $\int f(g(t))g'(t) dt = H(t) + c$ .

3. Schritt: Auflösung von  $x = g(t)$  durch die Umkehrfunktion  $h$  von  $g$ , d.h.  $t = h(x)$

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt = H(t) + c = H(h(x)) + c$$

**Beispiel:** Berechnung von  $F(x) = \int \sqrt{1-x^2} dx$  mit der Substitution  $x = \sin t$  und

$$dx = \cos t dt.$$

$$i) F(\sin t) = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt$$

$$ii) \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} (t + \sin t \cdot \cos t) + c \text{ mit partieller Integration.}$$

$$iii) F(x) = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \cdot \cos(\arcsin x)) + c = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}) + c$$

### Integration mit Partialbruchzerlegung

Mit dem sogenannten Partialbruchansatz können alle rationalen Funktionen integriert werden. Man setzt dabei voraus, dass die zu integrierende Funktion  $f(x)$  eine echt gebrochene rationale Funktion in gekürzter Darstellung ist:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ wobei } p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ mit } \text{ggT}(p(x), q(x)) = 1 \text{ und } \text{Grad}(p(x)) < \text{Grad}(q(x)).$$

Außerdem setzen wir voraus, dass alle reellen Nullstellen  $b_1, \dots, b_r$  und alle komplexen Nullstellen  $z_1, \overline{z_1}, \dots, z_s, \overline{z_s}$  des Polynoms  $q(x)$  bekannt sind:

$$\begin{aligned} q(x) &= c \cdot (x - b_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - b_r)^{k_r} \cdot \underbrace{[(x - z_1)(x - \overline{z_1})]^{l_1}}_{=q_1(x)} \cdot \underbrace{[(x - z_s)(x - \overline{z_s})]^{l_s}}_{=q_s(x)} \\ &= c \cdot \prod_{i=1}^r (x - b_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^s [q_j(x)]^{l_j} \end{aligned}$$

Der Partialbruchansatz stellt die rationale Funktion  $f(x)$  als eine Summe spezieller Summanden dar:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^r \left( \frac{A_{i,1}}{(x - b_i)^1} + \dots + \frac{A_{i,k_i}}{(x - b_i)^{k_i}} \right) + \sum_{j=1}^s \left( \frac{B_{j,1}x + C_{j,1}}{(q_j(x))^1} + \dots + \frac{B_{j,l_j}x + C_{j,l_j}}{(q_j(x))^{l_j}} \right)$$

Man kann zeigen (wir verzichten hier auf den Beweis), dass es für die Unbekannten  $A_{i,k}, B_{j,l}$  und  $C_{j,l}$  eindeutige reelle Werte gibt, so dass die obige Gleichung erfüllt ist. Man erhält diese Werte indem zuerst beide Seiten der Gleichung mit dem Polynom  $p(x)$  multipliziert werden.

Nach Kürzen auf der rechten Seite entsteht eine Polynomgleichung. Durch Koeffizientenvergleich dieser Polynome erhält man ein lineares Gleichungssystem, das eine eindeutige Lösung hat.

**Beispiel:**

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 + 3x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} = \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2 \cdot (x - 1)^2} = \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{1,2}}{x^2} + \frac{A_{2,1}}{x - 1} + \frac{A_{2,2}}{(x - 1)^2}$$

Nach Multiplikation mit  $q(x)$  erhält man die folgende Polynomgleichung:

$$x^3 + 0x^2 + 3x + 1 = A_{1,1} \cdot x \cdot (x - 1)^2 + A_{1,2} \cdot (x - 1)^2 + A_{2,1} \cdot x^2 \cdot (x - 1) + A_{2,2} \cdot x^2$$

Durch Koeffizientenvergleich entsteht ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 &= & A_{1,1} & & & + A_{2,1} \\ 0 &= & -2A_{1,1} & + A_{1,2} & - A_{2,1} & + A_{2,2} \\ 3 &= & A_{1,1} & - 2A_{1,2} & & \\ 1 &= & & & A_{1,2} & \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems lässt sich leicht bestimmen:

$$A_{1,1} = 5, \quad A_{1,2} = 1, \quad A_{2,1} = -4, \quad A_{2,2} = 5,$$

Da das Nennerpolynom  $q(x)$  nur reelle Nullstellen hatte, kann man die rationale Funktion  $f(x)$  nach Auswertung des Partialbruchansatzes relativ leicht integrieren:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 3x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} dx &= 5 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - 4 \int \frac{dx}{x - 1} + 5 \int \frac{dx}{(x - 1)^2} \\ &= 5 \ln |x| - \frac{1}{x} - 4 \ln |x - 1| - \frac{5}{x - 1} + c \end{aligned}$$

Wenn das Nennerpolynom auch nichtreelle Nullstellen hat, wird die Integration der zugehörigen Summanden aus der Partialbruchzerlegung wesentlich komplizierter, aber durch Verwendung geeigneter Substitutionen können prinzipiell alle auftretenden Partialbrüche integriert werden.

### 5.3 Das bestimmte Integral

Das bestimmte Integral einer stetigen Funktion  $f$  über einem Intervall  $[a, b]$  wurde von Bernhard Riemann eingeführt und wird deshalb auch Riemannsches Integral genannt. Der Zusammenhang zum unbestimmten Integral ist auf den ersten Blick nicht offensichtlich, sondern wird erst durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung deutlich.

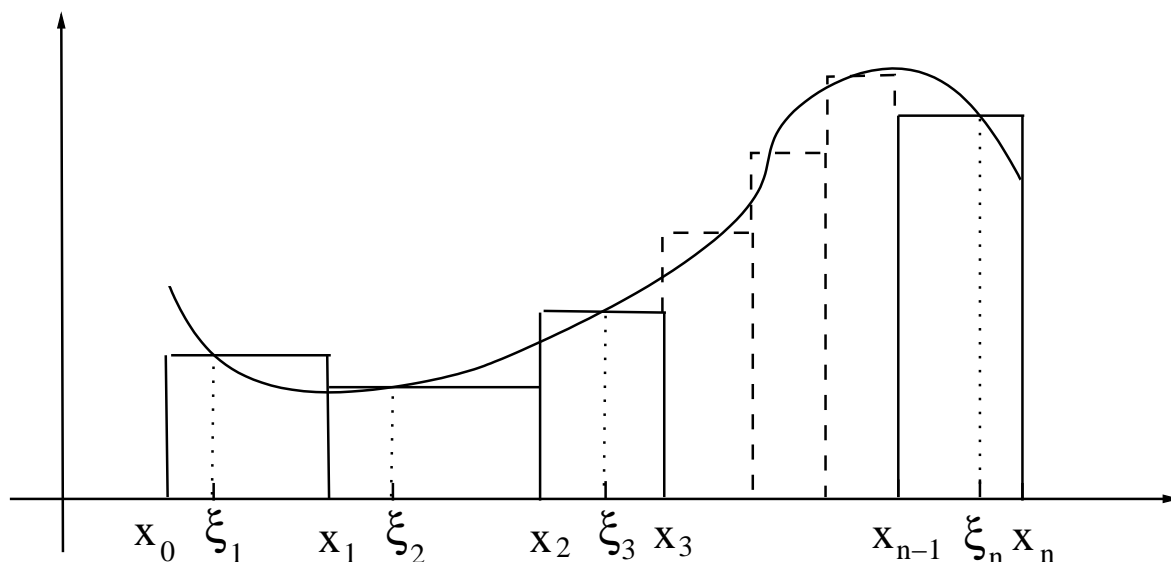
Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf dem Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion. Wir betrachten eine Zerlegung des Intervalls in  $n$  Teilintervalle durch das Einfügen von  $n - 1$  Teilungspunkten, die zusammen mit den Intervallgrenzen eine streng monoton steigende endliche Folge bilden:

$$a = x_0 < \underbrace{x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}}_{\text{Teilungspunkte}} < x_n = b$$

Wird darüber hinaus für jedes Teilintervall ein Zwischenpunkt  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ausgewählt, kann man darauf basierend die sogenannte Zwischensumme oder Riemannsche Summe bilden:

$$Z_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Die folgende Abbildung zeigt, dass die Zwischensumme für Funktionen mit positiven Werten eine Approximation der Fläche zwischen Funktionsgraph und der  $x$ -Achse repräsentiert.



**Satz und Definition:** Für jede Folge von sich schrittweise verfeinernden Unterteilungen des Intervalls  $[a, b]$  mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Länge des größten Teilintervalls eine Nullfolge ist und für eine beliebige Auswahl der Zwischenpunkte bei jeder Unterteilung konvergiert die zugehörige Folge  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen einen eindeutigen Wert, den man das bestimmte Integral von  $f$  über dem Intervall  $[a, b]$  nennt und mit  $\int_a^b f(x) dx$  bezeichnet, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

**Beweis:** Wir betrachten aus jedem Teilintervall  $[x_{i-1}, x_i]$  zwei spezielle Zwischenwerte in denen  $f$  den minimalen bzw. maximalen Wert auf  $[x_{i-1}, x_i]$  annimmt und bezeichnen mit  $m_i$  bzw.  $M_i$  diese minimalen bzw. maximalen Werte von  $f$  auf  $[x_{i-1}, x_i]$ . Damit ergeben sich zwei spezielle Zwischensummen, nämlich die Untersumme  $s_n = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$  und die Obersumme  $S_n = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ . Bezeichnet man mit  $m$  und  $M$  das globale Minimum und das globale Maximum von  $f$  auf dem Gesamtintervall  $[a, b]$ , so ergibt sich die folgende Ungleichungskette

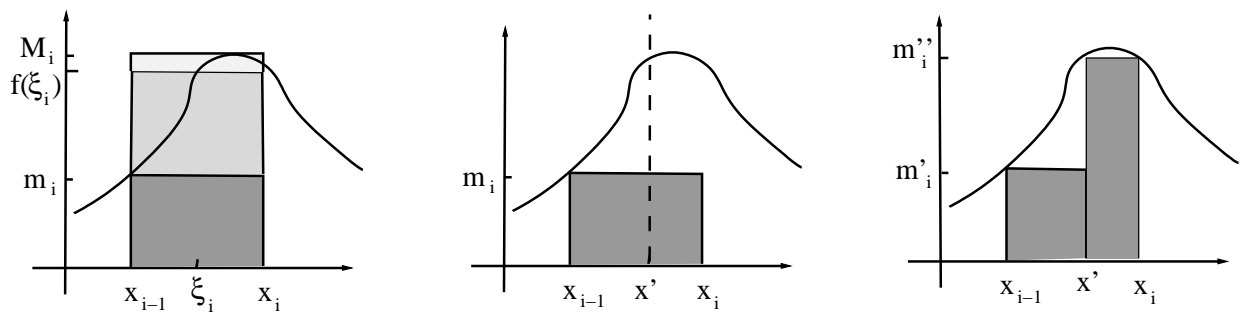
$$m(b - a) \leq s_n \leq Z_n \leq S_n \leq M(b - a)$$

Die Konvergenz der Folge  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen einen eindeutigen Wert ergibt sich aus der folgenden Schlusskette:

1. Die Folge der Untersummen ist monoton wachsend und die Folge der Obersummen ist monoton fallend, d.h. beide Folgen konvergieren nach Monotoniekriterium.

2. Wir zeigen, dass die Differenzenfolge  $(S_n - s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist. Damit konvergieren  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen den gleichen Wert und nach Vergleichskriterium konvergiert dann auch  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen diesen Wert.
3. Der Grenzwert, gegen den  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, hängt nicht von der zu Grunde liegenden Unterteilungsfolge ab, sofern diese Unterteilungsfolge die Eigenschaft hat, dass die Länge des größten Teilintervalls eine Nullfolge ist.

ad 1) Die Voraussetzung über die schrittweise Verfeinerung der Unterteilungen bedeutet, dass die  $(n + 1)$ -te Unterteilung aus der  $n$ -ten Unterteilung hervorgeht durch Einführung eines zusätzlichen Unterteilungspunktes  $x'$  in einem der Intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  der  $n$ -ten Unterteilung. Die Abbildung zeigt, dass unter dieser Voraussetzung die Folge der Untersummen monoton wachsend und die Folge der Obersummen monoton fallend sein muss. Formal sei  $m_i$  das Minimum von  $f$  auf dem Intervall  $[x_{i-1}, x_i]$  und  $m'_i$  bzw.  $m''_i$  die Minima von  $f$  auf den Teilintervallen  $[x_{i-1}, x']$  bzw.  $[x', x_i]$ . Die folgende Abbildung zeigt links den Beitrag eines Teilintervalls zu Untersumme (dunkelgrau), Zwischensumme (dunkel- und mittelgrau) und zur Obersumme (Gesamtrechteck). In der Mitte und rechts ist der Beitrag eines Teilintervalls zur Untersumme und der Beitrag des gleichen Abschnitts nach der Verfeinerung der Unterteilung durch einen zusätzlichen Unterteilungspunkt  $x'$  zu sehen.



Offensichtlich ist  $m'_i \geq m_i$  und  $m''_i \geq m_i$  und da sich die Untersummen  $s_n$  und  $s_{n+1}$  nur auf diesem Teil unterscheiden, gilt

$$\begin{aligned}
 s_{n+1} - s_n &= m'_i \cdot (x' - x_{i-1}) + m''_i \cdot (x_i - x') - m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
 &\geq m_i \cdot (x' - x_{i-1}) + m_i \cdot (x_i - x') - m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
 &= m_i \cdot (x' - x_{i-1} + x_i - x' - (x_i - x_{i-1})) = 0
 \end{aligned}$$

und damit ist  $s_{n+1} \geq s_n$ . Für die Obersumme argumentiert man analog.

ad 2) Sei ein  $\epsilon > 0$  gegeben und bezeichne  $\epsilon'$  den Wert  $\frac{\epsilon}{b-a}$ . Für die  $n$ -te Unterteilung bezeichnen wir mit  $\alpha_n = \max\{M_i - m_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  und stellen fest, dass auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  auf  $[a, b]$  die Ungleichung  $\alpha_n < \epsilon'$  immer dann erfüllt ist, wenn die maximale Länge der Teilintervalle kleiner als das zu  $\epsilon'$  passende  $\delta$  aus der Stetigkeitsdefinition ist. Somit erhalten wir

$$0 \leq S_n - s_n = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_n \cdot (x_i - x_{i-1}) = \alpha_n \cdot (b - a) < \epsilon' \cdot (b - a) = \epsilon$$

für ausreichend große  $n$ .

ad 3) Wir betrachten zwei Unterteilungsfolgen mit der Eigenschaft, dass die Größe des längsten Teilintervalls gegen Null geht und bezeichnen die entsprechenden Folgen der Untersummen mit  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Um nachzuweisen, dass die Grenzwerte  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  und

$s' = \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n$  gleich sind, zeigen wir, dass für jedes  $\epsilon > 0$  die Differenz  $|s - s'|$  kleiner als  $\epsilon$  ist. Offensichtlich gibt es Indizes  $n_1$  und  $n_2$  mit  $|s_{n_1} - s| < \epsilon/2$  und  $|s'_{n_2} - s'| < \epsilon/2$ . Jetzt betrachten wir eine Unterteilung, die alle Unterteilungspunkte der  $n_1$ -ten Unterteilung der ersten Folge und der  $n_2$ -ten Unterteilung der zweiten Folge enthält. Sie ist also eine Verfeinerung beider Unterteilungen und nach der Monotonieeigenschaft kann ihre Untersumme  $u$  nicht weiter von  $s$  bzw. von  $s'$  entfernt sein, als  $s_{n_1}$  bzw.  $s'_{n_2}$ . Daraus folgt

$$|s - s'| = |s - u + u - s'| \leq |s - u| + |u - s'| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

**Hier endet leider die aktuelle Version des Skripts. Die weiteren Themen muss man entweder mitschreiben oder in einem Buch nachlesen:**

- **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**
- **Mittelwertsatz der Integralrechnung**
- **Anwendungen der Integralrechnung zur Bestimmung von Flächen, Volumen und Kurvenlängen**
- **Potenzreihen**
- **Taylor-Formel und Reihenentwicklung für einige Standardfunktionen**