4. Übung | **Informatik B** | **SS 08**

Klaus Kriegel | **Abgabe: 20.05.2008, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **MST** $(4+4+3$ Punkte$)$

Im 3–dimensionalen Würfelgraphen (dessen Knoten üblicherweise die 3–Tupel aus $\{0,1\}^3$ sind) werden die Knoten durch die Binärzahlen der zugehörigen Tupel nummeriert. Eine Kantengewichtsfunktion wird durch $w(\{i,j\}) = |i-j| + \frac{\min(i,j)}{10}$ definiert, wobei der zweite Summand nur dazu da ist, die Kantengewichte paarweise verschieden zu halten.

a) Berechnen Sie alle Kantengewichte und bestimmen Sie den MST dieses Graphen mit dem Algorithmus von Prim mit dem Startknoten 7. Zeichnen Sie den MST und geben Sie die Reihenfolge an, in der Knoten in den MST aufgenommen werden.

b) Berechnen Sie noch einmal den MST mit dem Algorithmus von Kruskal und geben Sie die Reihenfolge an, in der Kanten in den MST aufgenommen werden. Wieviele Änderungen des Zeigers auf die Repräsentanten der Teilmengen in der UNION–FIND–Datenstruktur wurden vorgenommen (Initiale Festlegung wird nicht mitgezählt)?

c) Wir nummerieren die Knoten eines d–dimensionalen Würfelgraphen mit den Zahlen $0, 1, \ldots 2^d - 1$ (Binärzahlen der zugehörigen Tupel) und definieren ein Kantengewicht durch $w(\{i,j\}) = |i-j|$ (ohne gebrochenen Anteil!). Welches Gesamtgewicht hat dann ein MST dieses Graphen (kurze Begründung!)?

Aufgabe 2: **TSP–Approximation** $(4+4$ Punkte$)$

a) Sei ein vollständiger Graph G auf einer Knotenmenge V von Punkten in der Ebene:

$$V = \{(-5,0), (-4,5), (0,0), (0,1), (0,4), (2,1), (3,2), (4,-1)\}$$

Als Kantengewicht wird der Euklidische Abstand verwendet:

$$w(e) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2} \quad \text{für alle} \quad e = \{P,Q\} \quad \text{mit} \quad P = (p_x, p_y) \quad \text{und} \quad Q = (q_x, q_y)$$

Bestimmen Sie den MST von G mit dem Algorithmus von Prim. Damit der Aufwand nicht zu groß wird, können Sie die Zusatzinformation nutzen, dass keine Kante des MST länger als 5 ist.

b) Zeichen Sie den MST von G maßstabsgerecht und bilden Sie die Eulertour, die beim Umrunden des MST entgegen dem Uhrzeigersinn entsteht. Welche Rundreise ergibt sich, wenn Sie den Approximationsalgorithmus mit der Startkante $((0,1),(0,4))$ verwenden. Zeigen Sie, dass diese Rundreise nicht optimal ist.

Aufgabe 3: **Gegenbeispiel** (2 Punkte)

In der Vorlesung wurde besprochen, wie man den zweitleichtesten aufspannenden Baum bestimmen kann. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die folgende vereinfachte Variante nicht korrekt arbeitet: Für einen gegebenen zusammenhängenden Graphen $G = (V,E)$

mit Kantengewichtsfunktion $w : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ wird ein MST $T = (V, E')$ berechnet. Sei $e = \{u, v\} \in E \setminus E'$ eine leichteste Nicht–MST–Kante und e' eine schwerste Kante auf dem Weg von u nach v in T.
Behauptung: Der Baum $T_e = (V, (E' \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ ist zweitleichtester aufspannender Baum von G.