

Aufgabe 1:**Bäume im Q_3** **(6 Punkte)**

Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der aufspannenden Bäume des Würfelgraphen Q_3 .

- Welche Beziehung besteht zwischen den Anzahlen von Knoten des Grads 1, 2 und 3 in aufspannenden Bäumen des Q_3 ? Nutzen Sie das Handschlaglemma zur Beantwortung dieser Frage.
- Stellen Sie eine Liste aller aufspannenden Bäume des Q_3 auf (ein Vertreter für jede Isomorphieklasse) und geben Sie eine Begründung für die Vollständigkeit dieser Liste. Achtung: Nicht jede Kombination, die nach a) in Frage kommt, ist realisierbar.
- Welche Beziehung besteht zwischen den Anzahlen von Knoten des Grads 1, 2, 3 und 4 in aufspannenden Bäumen des Q_4 ? Welche Kombinationen von Knoten vom Grad 3 und 4 kommen aus Abzählgründen in Frage und welche Anzahlen von Knoten vom Grad 1 und 2 resultieren daraus?

Aufgabe 2:**bipartite Graphen****(8 Punkte)**

Welche der folgenden Graphen sind bipartit und welche nicht. Begründen Sie die Antworten.

- $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 = \{1, 2, \dots, 1000\}$ und $\{i, j\} \in E_1$ genau dann, wenn $\frac{\max(i,j)}{\min(i,j)}$ ganzzahlig und eine Primzahl ist.
- $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $V_2 = \{1, 2, \dots, 1000\}$ und $\{i, j\} \in E_2$ genau dann, wenn $\frac{\max(i,j)}{\min(i,j)}$ ganzzahlig und eine Potenz von 2.
- $G_3 = (V_3, E_3)$ mit $V_3 = \{1, 2, \dots, 1000\}$ und $\{i, j\} \in E_3$ genau dann, wenn $\frac{\max(i,j)}{\min(i,j)}$ ganzzahlig und gerade.
- $G_4 = (V_4, E_4)$ mit $V_4 = \{1, 2, \dots, 10\}^3$ und $\{(a, b, c), (d, e, f)\} \in E_4$ genau dann, wenn $|a - d| + |b - e| + |c - f| = 1$.

Aufgabe 3:**Zusammenhang und Durchmesser****(8 Punkte)**

Bestimmen Sie für die Graphen aus Aufgabe 2 die Anzahl der Zusammenhangskomponenten und im Fall von zusammenhängenden Graphen den Durchmesser, sonst den größten Durchmesser einer Zusammenhangskomponente des Graphen.