Prof. Dr. Helmut Alt
Sven Reinck

SS 2008
10. Juni 2008

Lösung zur 7. Übung zu Höhere Algorithmik II

3. **Aufgabe** (7 Punkte)
   Beweisen Sie Lemma 1.5.19 aus dem Skript:

   Wir betrachten die Kugel B_n und das Ellipsoid

$$E = \{x | x \in \mathbb{R}^n \text{ und } (x-t)^T C^{-1}(x-t) \leq 1\} \text{ mit } t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{n^2}{(n+1)^2} & & & 0 \\ & \frac{n^2}{n^2-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{n^2}{n^2-1} \end{pmatrix}$$

   Dann gilt:

   a) C ist symmetrisch positiv definit, d.h. von der Form $C = QQ^T$, Q regulär. Also ist E ein Ellipsoid.

      $C = QQ^T$, mit $Q = diag(\frac{n}{n+1}, \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}, \ldots, \frac{n}{\sqrt{n^2-1}})$

   b) Halbkugel $\frac{1}{2}B_n = \{x | X^T X \leq \text{ und } x_1 \leq 0\}$ ist Teilmenge von E.
      Angenommen $x \in \frac{1}{2}B_n$. Dann

$$\begin{aligned}
(x-t)^T C^{-1}(x-t) &= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left(x_1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{n^2-1}{n^2}\sum_{i=2}^{n} x_i^2 \\
&= \frac{n^2-1}{n^2}x^T x + \frac{2n+2}{n^2}x_1^2 + \frac{2n+2}{n^2}x_1 + \frac{1}{n^2} \\
\text{wegen } x \in B_n \quad &\leq 1 + \frac{2n+2}{n^2}\left(x_1^2 + x_1\right) \\
\text{wegen } x \in \frac{1}{2}B_n \quad &\leq 1
\end{aligned}$$

c) $\frac{vol(E)}{vol(B_n)} < 2^{-\frac{1}{2(n+1)}}$

$$\frac{vol(E)}{vol(S_n)} = det(Q)$$

Weil Q diagonal ist,

$$det(Q) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

Weil für alle $x > 0$ gilt, dass $1+x \leq e^x$ und $1-x \leq e^{-x}$, ist

$$\begin{array}{rcccl} \frac{n}{n+1} & = & 1-\frac{1}{n+1} & \leq & e^{-\frac{1}{n+1}} \\ \frac{n^2}{n^2+1} & = & 1+\frac{1}{n^2-1} & \leq & e^{\frac{1}{n^2-1}} \end{array}$$

deshalb

$$det(Q) < exp\left(\frac{n-1}{2\left(n^2-1\right)} - \frac{1}{n+1}\right) < 2^{-\frac{1}{2(n+1)}}$$