Prof. Dr. Helmut Alt
Sven Reinck

SS 2008
16. Mai 2008

5. Übung zu Höhere Algorithmik II

Bitte begründen Sie explizit alle Ihre Antworten.

1. **Aufgabe** (6 Punkte)
   Den folgenden Satz brauchen Sie nicht zu beweisen, können ihn aber benutzen:
   Angenommen, es gibt mindestens eine nichtdegenerierte optimale zulässige Basislösung in folgendem LP, das im folgenden das primale LP genannt wird.

$$\begin{aligned}&\text{Maximiere } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\\&\text{mit } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ für alle } i \in \{1,2,\ldots,m\}\\&\text{und } x_1,\ldots,x_n \geq 0.\end{aligned}$$

   Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $t_1,\ldots,t_m \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ hat das LP

$$\begin{aligned}&\text{Maximiere } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\\&\text{mit } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + t_i \text{ für alle } i \in \{1,2,\ldots,m\}\\&\text{und } x_1,\ldots,x_n \geq 0\end{aligned}$$

   eine optimale Lösung und ihr optimaler Wert ergibt sich zu

$$z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* t_i$$

   wobei z^* der Wert der optimalen Lösung des primalen LP ist und $y_1^*,\ldots,y_m^*$ die optimale Lösung seines dualen LP.
   Interpretieren wir das primale LP in obigem Satz ökonomisch, so bedeuten die b_i's des LP Resourcen, ein x_j, wieviel von der j-ten Ware produziert wird und c_j, wieviel Gewinn eine Einheit dieser Ware einbringt. Interpretieren Sie die optimale Lösung des dualen LP ökonomisch.

2. **Aufgabe** (7 Punkte)
   Interpretieren Sie das Beispiel aus der Vorlesung des kürzesten Weges - wie in der Vorlesung gezeigt - als lineares Programm und interpretieren Sie die Zwischenschritte des Simplex-Algorithmus. Entwickeln Sie daraus einen allgemeinen Algorithmus ohne LP-Terminologie. Verwenden Sie dazu den Beispielgraphen aus der Vorlesung.

3. **Aufgabe** (7 Punkte)
   Zeigen Sie, dass folgende Funktionen in polynomieller Zeit berechenbar sind. Welche Laufzeit haben die von Ihnen vorgeschlagenen Algorithmen in Bezug auf gr(x)?

$$\begin{array}{ccc} +, -, \cdot, / & : & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \\ \lfloor \log_3 x \rfloor & : & \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ ggt & : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \end{array}$$

Tip: Die beiden Parameter der ggt-Funktion verringern sich alle zwei Schritte um die Hälfte.

Abgabe: 26.05.2008
(vor der Vorlesung)