Prof. Dr. Helmut Alt
Sven Reinck

SS 2008
16. Juli 2008

Lösung zur 13. Übung zu Höhere Algorithmik II

1. **Aufgabe**

   Die Gewinnmatrix für beide Spieler:

M F	F	T
F	6 5	1 1
T	2 2	5 6

   Die beiden Spieler wählen mit Wahrscheinlichkeit ε_M bzw. ε_F Fussball. Für Theater bleibt jeweils der Rest.

	F	T
M	ε_M	$1-\varepsilon_M$
F	ε_F	$1-\varepsilon_F$

   u_M ist der Erwartungswert für den Gewinn von M.

$$
\begin{aligned}
u_M &= 6\varepsilon_M\varepsilon_F + 1(1-\varepsilon_M)\varepsilon_F + 2\varepsilon_M(1-\varepsilon_F) + 5(1-\varepsilon_M)(1-\varepsilon_F) \\
&= \varepsilon_M \underbrace{[6\varepsilon_F - 1\varepsilon_F + 2(1-\varepsilon_F) - 5(1-\varepsilon_F)]}_{=0} + 1\varepsilon_F + 5(1-\varepsilon_F)
\end{aligned}
$$

   Im Nash-GG hängt der eigene Erwartungswert (u_M) nicht mehr von der eigenen Strategie ab (ε_M). Also muss die eckige Klammer 0 werden.

$$
\begin{aligned}
5\varepsilon_F - 3(1-\varepsilon_F) &= 0 \\
8\varepsilon_F - 3 &= 0 \\
\varepsilon_F &= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

   Analog ergibt sich auch der Rest der Tabelle und die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der tatsächlichen Situationen:

	F	T
M	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$
F	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

M F	F	T
F	$\frac{15}{64} \approx 23\%$	$\frac{9}{64} \approx 14\%$
T	$\frac{25}{64} \approx 39\%$	$\frac{15}{64} \approx 23\%$

2. **Aufgabe**
Die Gesamtproduktion ist die Summe der einzelnen Produktionen:

$$q = \sum_i q_i$$

Angenommen alle Unternehmer bis auf Unternehmer i haben ihre Entscheidung Schon getroffen. Dann ist t_i die Gesamtproduktion bis auf die Produktion von Unternehmer i:

$$t_i = q - q_i \Rightarrow q = t_i + q_i$$

Die Funktion $p(q) = 1 - q$ sagt uns, welchen Preis p wir verlangen dürfen, wenn q Produkte verkauft werden sollen.
Der Gewinn von Unternemer i (G_i) ergibt sich also volgendermaßen:

$$\begin{aligned} G_i &= q_i p(q) \\ &= q_i(1-q) \\ &= q_i - q_i q \\ &= q_i - q_i(t_i + q_i) \\ &= q_i - t_i q_i - q_i^2 \end{aligned}$$

Um den Gewinn zu maximieren suchen wir das Maximum der Funktion. An dieser Stelle muss die Ableitung $G_i' = 0$ sein.

$$\begin{aligned} G_i' &= 1 - t_i - 2q_i = 0 \\ q_i &= \frac{1-t_i}{2} \end{aligned}$$

Wenn alle diese Strategie verfolgen stellt sich folgende Situation ein:

$$2q_i + t_i = 1 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad q_i = \tfrac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad q = \tfrac{n}{n+1}$$

$$G_i = \frac{1}{n+1}(1 - \frac{n}{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$G = \sum_i G_i = nG_i = \frac{n}{(n+1)^2}$$

Verfolgt ein Monopolist die Strategie seinen Gewinn zu maximieren, ergibt sich folgendes:

$$q_M = \frac{1}{2}$$

$$G_M = \frac{1}{4}$$