

GO ist PSPACE-schwer

Beitrag zum Seminar über Algorithmen und Komplexität
Freie Universität Berlin, SS 07

Von Frederik Hermans

24. Mai 2007

1 Einführung

GO ist ein asiatisches Brettspiel für zwei Spieler. Lichtenstein und Sipser haben 1980 gezeigt, dass das Problem, für eine beliebige GO-Situation den Gewinner festzustellen, PSPACE-schwer ist [1]. Dieser Beweis ist Gegenstand des Vortrags.

Die Komplexitätsklasse PSPACE umfasst diejenigen Entscheidungsprobleme, deren Lösung auf einer Turing-Maschine polynomiell viel Platz benötigt. PSPACE-schwere Probleme gelten gemeinhin als so schwer, dass sie in der Praxis im Allgemeinen nicht lösbar sind.

Der Beweis wird durch eine Reihe von Reduktionen geführt. Zunächst wird das PSPACE-schwere Problem TQBF auf das Spiel GG reduziert, GG wird auf eine planare Version des Spiels (PGG) reduziert, und dieses schließlich auf GO.

2 TQBF ist PSPACE-schwer

Definition. QBF ist die Menge der quantifizierten Booleschen Formeln.

$$QBF = \{Q_1 v_1 Q_2 v_2 \dots Q_n v_n : F(v_1, v_2, \dots, v_n)\},$$

wobei Q_i Quantoren sind (\forall oder \exists), v_i Boolesche Variablen sind und F eine Boolesche Formel in konjunktiver Normalform ist.

Definition. $TQBF$ ist die Menge der quantifizierten Booleschen Formeln aus QBF , die wahr sind.

Satz. Das Problem, für eine gegebene Formel aus QBF festzustellen, ob sie in $TQBF$ liegt (also wahr ist), ist PSPACE-schwer [2].

3 GG ist PSPACE-schwer

Definition. GG (Generalized Geography) ist ein Spiel für zwei Spieler, das auf einem gerichteten Graphen mit ausgezeichneter Startecke gespielt wird. Die Spieler wählen abwechselnd von der augenblicklichen Ecke eine ausgehende Kante und markieren die Endecke. Das Spiel wird an der markierten Endecke fortgesetzt. Derjenige Spieler verliert, der am Zug ist und keine Kante mehr wählen kann (weil die

Endecken aller ausgehenden Kanten bereits markiert sind oder weil die augenblickliche Ecke keine ausgehenden Kanten hat).

Satz. Das Problem, den Gewinner eines GG-Spiels festzustellen, ist PSPACE-schwer.

4 Planares GG ist PSPACE-schwer

Satz. Das Spiel GG ist auch dann PSPACE-schwer, wenn es auf einem planaren, bipartiten Graphen gespielt wird, in dem jede Ecke höchstens Grad 3 hat.

Jeder gerichtete Graph, der wie bei der Reduktion $TQBF \leq GG$ beschrieben konstruiert wurde, lässt sich systematisch in einen planaren, bipartiten Graphen mit Eckengrad höchstens drei überführen [1, 3].

5 Die GO-Regeln

GO wird auf einem Brett gespielt, auf dem ein Gitter mit $n \times n$ Linien eingezeichnet ist. Die Schnittpunkte des Gitters heißen *Felder*. Zwei Spieler - Schwarz und Weiß - ziehen abwechselnd, indem sie einen Spielstein auf ein freies Feld setzen oder passen. Im Laufe des Spieles entstehen auf dem Brett Gruppen von gleichfarbigen Steinen. Eine *Gruppe* ist eine maximale Menge von gleichfarbigen Steinen, die benachbart sind.

Schlagen Wenn eine Gruppe von schwarzen Steinen vollständig von weißen Steinen umgeben ist, wird die Gruppe der schwarzen Steine vom Brett entfernt (entsprechend für eine Gruppe von weißen Steinen).

Selbstmord Es ist nicht erlaubt, einen Stein so zu setzen, dass er nach dem Spielzug kein freies, benachbartes Feld mehr hat. Eine Ausnahme hiervon: Wenn durch das Setzen des Steines die umliegenden Steine geschlagen werden, ist der Zug erlaubt.

Augen Es gibt bestimmte Gruppen, die nicht geschlagen werden können. Das sind genau die Gruppen, die in ihrem Inneren mindestens zwei einzelne, nicht benachbarte freie Felder haben. Das Schlagen einer solchen Gruppe ist durch die Selbstmord-Regel ausgeschlossen. Eine unschlagbare Gruppe wird auch eine Gruppe mit *Augen* genannt. Die freien Felder in der unschlagbaren Gruppe werden *Gebiet* von Schwarz bzw. Weiß genannt.

Spielende Das Spiel ist beendet, wenn beide Spieler passen. Es werden alle Steine entfernt, die nicht zu einer unschlagbaren Gruppe gehören. Die Punktzahl des Spielers Schwarz ist die Differenz zwischen der Anzahl der freien Felder im Inneren seiner unschlagbaren Gruppen und der Anzahl der schwarzen Steine, die im Verlaufe des Spiels geschlagen wurden. Analog wird die Punktzahl für Weiß berechnet. Der Spieler mit der höheren Punktzahl gewinnt.

In der Praxis gibt es noch eine weitere Regel, die sogenannte Ko-Regel, die direkte Wiederholungen der selben Spielsituation ausschließt. Diese Regel ist für den Beweis nicht relevant, also lassen wir sie aus. Eine vollständige Erklärung aller GO-Regeln findet sich in [4].

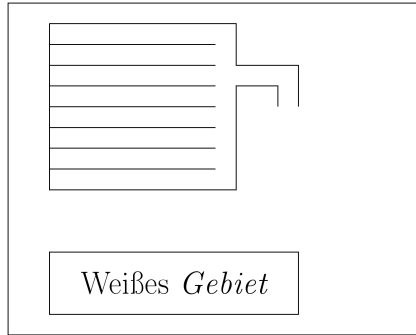
6 GO ist PSPACE-schwer

Satz. Das Problem, für eine beliebige Situation eines GO-Spiels den Gewinner zu bestimmen, ist PSPACE-schwer.

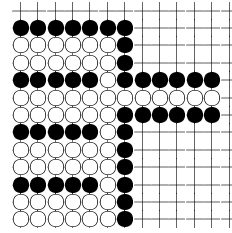
Literatur

- [1] D. Lichtenstein, M. Sipser *GO is Polynomial-Space Hard*
Journal of the ACM, Vol 27, No 2, April 1980, pp 393-401
- [2] A. R. Meyer, L. J. Stockmeyer *Word problems requiring exponential time*
Preliminary Report Proc 5th Annual ACM Symp Theory Cmptg, Austin, Texas,
1973, pp 1-9
- [3] D. Lichtenstein *Planar formulae and their uses*
SIAM Journal of Computing, Vol 11, No 2, May 1982, pp 329-343
- [4] *The Japanese Rules Of Go*
<http://www.cs.cmu.edu/~wjh/go/rules/Japanese.html>

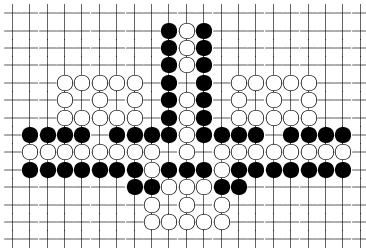
Anhang



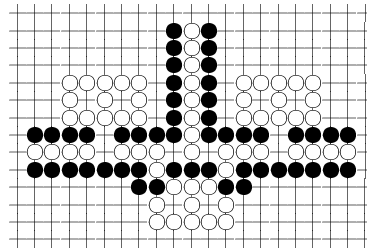
(a) Globale Struktur der GO-Situation



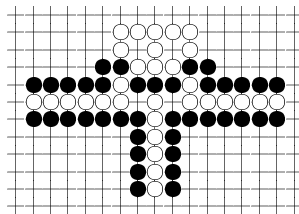
(b) Lücke in der weißen Gruppe



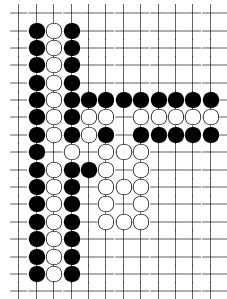
(c) Konfiguration für eine Ecke vom Typ Auswahlmöglichkeit Spieler 1



(d) Konfiguration für eine Ecke vom Typ Auswahlmöglichkeit Spieler 2



(e) Konfiguration für eine Ecke vom Typ Zusammenführung



(f) Konfiguration für eine Ecke vom Typ Test