Polynomialzeitreduktionen in NP

Def.: Sei $L_1, L_2 \subset \Sigma^*$. Falls es eine totale, *in polynomieller Zeit* berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, mit

$$\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \text{ gdw. } f(w) \in L_2,$$

so heisst L_1 auf L_2 *polynomiell reduzierbar mittels* f

$$\text{“}L_1 \leq_p L_2\text{”}$$

Def.: $L \subset \Sigma^*$ heisst

- *NP-vollständig*, falls $L \in NP$ und $\forall L' \in NP : L' \leq_p L$

$$NPC := \{L \subset \Sigma^* \mid L \text{ ist } NP\text{-vollständig}\}$$

Satz: Sei $L_1, L_2 \in NP$ mit $L_1 \leq_p L_2$. Dann gilt $L_1 \in NPC \to L_2 \in NPC$

Satz: $CNFSAT \in NPC$

Zwei Sprachen in NP

- 3-CNFSAT = {<F> | F ist erfüllbare aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform mit genau 3 Literalen pro Klausel}

- CLIQUE = {<G,k> | G ist ungerichteter Graph, in dem es einen vollständigen Untergraphen auf k Knoten gibt}

NP-vollständige Sprachen: 3-CNFSAT

Satz: 3-CNFSAT $\in$ **NPC**

Bew.:

- 3-CNFSAT $\in$ **NP** (s.o.)
- CNFSAT $\leq_p$ 3-CNFSAT

  konstruiere aus CNF-Formel $f = \wedge_i c_i$ mit Klauseln $c_i = \vee_j l_{i,j}$ und Literalen $l_{i,j} \in \{x_1,\dots,x_n\} \cup \{\neg x_1,\dots,\neg x_n\}$ eine 3CNF-Formel f' durch lokale Substitution

NP-vollständige Sprachen: 3-CNFSAT

ersetze Klausel c in f gemäss

$c = l \quad \rightarrow \quad (l \vee l \vee l)$

$c = l_1 \vee l_2 \quad \rightarrow \quad (l_1 \vee l_1 \vee l_2)$

$c = l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k \quad \rightarrow \quad c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_{k-2}$ wobei

$$
\begin{aligned}
c_1 &:= (l_1 \vee l_2 \vee z_{c,1}) \\
c_2 &:= (\neg z_{c,1} \vee l_3 \vee z_{c,2}) \\
c_3 &:= (\neg z_{c,2} \vee l_4 \vee z_{c,3}) \\
&\dots \\
c_{k-3} &:= (\neg z_{c,k-4} \vee l_{k-2} \vee z_{c,k-3}) \\
c_{k-2} &:= (\neg z_{c,k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)
\end{aligned}
$$

mit neuen Variablen $z_{c,1}, z_{c,2}, \dots, z_{c,k-3}$

NP-vollständige Sprachen: 3-CNFSAT

es gilt:

- f' kann aus f in polynomieller Zeit konstruiert werden
- f' ist erfüllbar gwd. f ist erfüllbar

NP-vollständige Sprachen: 3-CNFSAT

- f' ist erfüllbar gwd. f ist erfüllbar

Bew.:

- f erfüllt durch Belegung t
  → für jede Klausel c macht t mindestens ein Literal l_i wahr (i sei minimal)
  - $t(l_1)=1$ oder $t(l_2)=1$
    → Belegung t' mit $t'(l_1)=1$ oder $t'(l_2)=1$ und $t'(z_{c,j})=0$ für $1 \leq j \leq k-3$ erfüllt f'
  - $t(l_i)=1$ für $i>2$
    → Belegung t' mit $t'(z_{c,j})=1$ für $1 \leq j \leq i-2$ und $t'(z_{c,j})=0$ für $i-1 \leq j \leq k-3$ erfüllt f'

NP-vollständige Sprachen: 3-CNFSAT

- f' ist erfüllbar gwd. f ist erfüllbar

Bew.:

- f nicht erfüllbar

  → für jede Belegung t von f gibt es eine Klausel
  $c = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_k$ in f mit $t(l_j)=0$ für $1 \leq j \leq k$

  → erfüllende Belegung t' für f' müsste von der Form $t'(z_{c,j})=1$ für $1 \leq j \leq k-3$ sein

  → Klausel c_{k-2} nicht erfüllt

NP-vollständige Sprachen: CLIQUE

Satz: CLIQUE $\in$ NPC

Bew.:

- CLIQUE $\in$ NP (s.o.)
- 3-CNFSAT $\leq_p$ CLIQUE

  konstruiere aus 3-CNF-Formel $f = \wedge_{1 \leq i \leq n} c_i$ mit Klauseln $c_i = \vee_{1 \leq j \leq 3} l_{i,j}$ und Literalen $l_{i,j} \in \{x_1,\ldots,x_m\} \cup \{\neg x_1,\ldots,\neg x_m\}$ einen Graphen G_f, so dass gilt:

  f ist erfüllbar gdw. G_f hat eine n-Clique

  $f \in$ 3-CNFSAT gdw. $\langle G_f, n \rangle \in$ CLIQUE

NP-vollständige Sprachen: CLIQUE

$f = \wedge_{1 \leq i \leq n} c_i$ mit $c_i = \vee_{1 \leq j \leq 3}\, l_{i,j}$ und $l_{i,j} \in \{x_1,\dots,x_m\} \cup \{\neg x_1,\dots,\neg x_m\}$

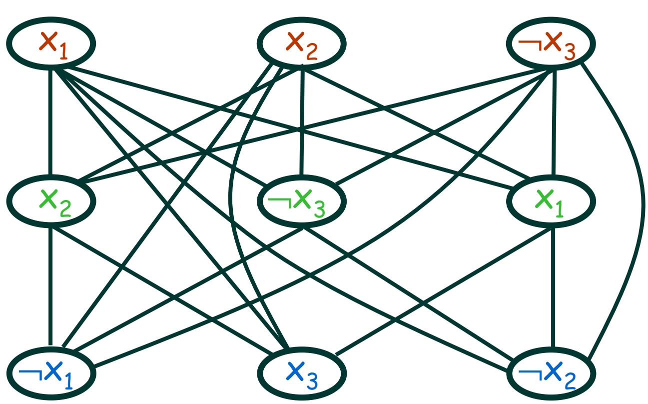
$G_f = (V,E)$, wobei

- Knoten von G = alle Literale in den Klauseln
  $V = \{\, l_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 3 \,\}$
- Kante zwischen zwei Literalen $l_{i,j}$ und $l_{k,l}$, falls
  - $l_{i,j}$ und $l_{k,l}$ aus verschiedenen Klauseln
  - $l_{i,j}$ und $l_{k,l}$ gleichzeitig erfüllbar
    $E = \{\, \{l_{i,j}, l_{k,l}\} \mid 1 \leq i < k \leq n,\ l_{i,j} \neq \neg l_{k,l} \}$

- G_f kann aus f in polynomieller Zeit konstruiert werden

NP-vollständige Sprachen: CLIQUE

$f = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee \neg x_2)$



NP-vollständige Sprachen: CLIQUE

- f ist erfüllbar gdw. G_f hat eine n-Clique

Bew.:

- f erfüllt durch Belegung t
  → für jede Klausel c_i macht t mindestens ein Literal l_{i,j_i} wahr
  → $K = \{l_{i,j_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ ist eine n-Clique in G
- G hat eine n-Clique K
  → K muss aus jeder Klausel c_i genau ein Literal l_{i,j_i} enthalten
  → jede Belegung t mit $t(l_{i,j_i})=1$ für $1 \leq i \leq n$ erfüllt f