Überblick

1. regulære Sprachen
   - endliche Automaten
     (deterministisch vs. nichtdeterministisch)
   - Nichtregularität
2. Berechenbarkeit
   - Registermaschinen/Turingmaschinen
   - Churchsche These
   - Unentscheidbarkeit
3. effiziente Berechenbarkeit
   - Komplexitätsklassen
   - deterministische vs. nichtdeterministische TM
   - P vs. NP Problem
4. Grammatiken
   - Chomsky-Hierarchie
   - kontextfreie und kontextsensitive Sprachen
   - Kellerautomaten

Grundsätzliche Fragestellung

Ist eine algorithmische Problemstellung lösbar und wenn ja, mit welchen Mitteln?

- was ist eine algorithmische Problemstellung?
  → formale Sprachen
- benötigen einen Berechenbarkeitsbegriff
  → Maschinenmodelle (unterschiedlich mächtig!)
  - endliche Automaten
  - Kellerautomaten
  - Turingmaschinen

Bsp.: Ein unentscheidbares Problem

Postsches Korrespondenzproblem (PKP) – E. Post, 1946

- **Geg.**: Folge von k Wortpaaren ("*Korrespondenzen*")

  $$K = \{(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_k,y_k)\}$$

  über einem endlichen Alphabet Σ wobei x_i, y_i nichtleere Wörter sind
- **Ges.**: Gibt es eine Zahl $n \geq 1$ und Indizes $i_1,\ldots,i_n \in \{1,\ldots,k\}$, so dass

  $$x_{i_1} \circ x_{i_2} \ldots \circ x_{i_n} = y_{i_1} \circ y_{i_2} \ldots \circ y_{i_n}$$

- **Bsp.**: $K = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$ hat Lösung

  $$x_2 \circ x_1 \circ x_1 \circ x_3 = 10111|1|1|10$$
  $$= 10|111|111|0 = y_2 \circ y_1 \circ y_1 \circ y_3$$

Algorithmische Probleme - Formale Sprachen

- Σ endliches Alphabet
- Σ^* Menge aller endlichen Wörter über Σ
- $L \subset \Sigma^*$ heißt formale Sprache über Σ

- Übersetzung algorithmischer Probleme in Wortprobleme für formale Sprachen:
  - $L_{prim} = \{ p \in \{0,1\}^* \mid p$ ist Binärdarstellung einer Primzahl$\}$
    $= \{10, 11, 101, 111, 1011, \ldots\}$

    entscheide, ob für $w \in \{0,1\}^*$ gilt, $w \in L_{prim}$ → Primzahltest
  - L_{JAVA} = Menge aller syntaktisch korrekten JAVA Programme

Darstellung formaler Sprachen

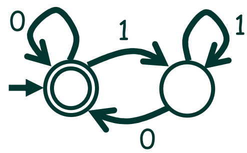
1. Mathematische Beschreibung
2. "Maschinen"-Standpunkt
3. Innerer Standpunkt

Mathematische Beschreibung

- L_{prim} = { $p \in \{0,1\}^*$ | p ist Binärdarstellung einer Primzahl}
- L_{PKP} = { $x_1\#y_1\#x_2\#y_2\#\ldots\#x_k\#y_k \in (\Sigma \cup \{\#\})^*$ |
  es gibt $n \geq 1$ und $i_1,\ldots,i_n \in \{1,\ldots,k\}$, so dass
  $x_{i_1}x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1}y_{i_2} \ldots y_{i_n}$}

Maschinen-Standpunkt

- $L(M)$ = alles was von einer Maschine M erkannt wird
  - Definition der Begriffe "Maschine" & "erkennen" nötig
  - **Bsp.**: (deterministischer endlicher Automat "dea")



$L(M) = (0^*1^*0)^* = \{\varepsilon, 0, 00, 000, \ldots, 10, 010, 0010, \ldots\}$

  - Motivation: Formalisierung des Begriffes "Berechenbarkeit"

Innerer Standpunkt

- $L(G)$ = alles was von einer Grammatik G erzeugt wird
  - Grammatik "=" Startsymbol + Ableitungsregeln

Bsp.: (kontextfreie Grammatik über $\Sigma=\{a,b\}$)

Startsymbol S

Regeln: $S \rightarrow aSb$

$S \rightarrow \varepsilon$ ("leeres Wort")

$L(G) = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$

  - Motivation: Compilerbau, Linguistik

Darstellung formaler Sprachen

1. Mathematische Beschreibung
2. Maschinen-Standpunkt
3. Innerer Standpunkt

Gesucht sind verschiedene Charakterisierungen von Klassen formaler Sprachen

Bsp.: *reguläre Sprachen* =

Sprachen die von dea erkannt werden =
Sprachen die von nea erkannt werden =
Sprachen die von regulären Grammatiken erzeugt werden

Alphabete, Wörter

- Σ bezeichnet ein endliches Alphabet von Zeichen
- Wort w über Σ = endliche Folge von Symbolen aus Σ (geschrieben ohne "," und "(", ")")
  - **Bsp.** $\Sigma=\{a,b\}$, w = abba
- $|w|$ bezeichnet die Länge des Wortes w
- über jedem Alphabet gibt es das leere Wort ε mit $|\varepsilon|=0$
- Σ^* bezeichnet die Menge aller Wörter über Σ

Konkatenation

- $\circ : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ mit $u \circ v := uv$
  - "Aneinanderfügen von Wörtern"
  - assoziative Operation mit ε als neutralem Element
    $\rightarrow$ $(\Sigma^*, \circ, \varepsilon)$ bildet ein Monoid
  - statt $u \circ v$ scheibt man meist uv
- $\Sigma^0 := \{\varepsilon\}$
- $\Sigma^{n+1} := \{wa \mid w \in \Sigma^n, a \in \Sigma\}$
- $\Sigma^+ := \bigcup_{n \geq 1} \Sigma^n$

Formale Sprachen

Def.: Eine Teilmenge $L \subset \Sigma^*$ heißt formale Sprache über Σ

Def.: Reguläre Operationen auf Sprachen $L_1, L_2 \subset \Sigma^*$

- Vereinigung
  $L_1 \cup L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \text{ oder } w \in L_2\}$
- Konkatenation
  $L_1 \circ L_2 = \{uv \in \Sigma^* \mid u \in L_1 \text{ und } v \in L_2\}$
- Kleene-Stern
  $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$ wobei
  $L^0 := \{\varepsilon\}$
  $L^{n+1} := \{uv \mid u \in L^n, v \in L\} = L \circ \ldots \circ L$ (n+1 mal)