Unschärfe (Fuzzy Logik)

Mengen $\longleftrightarrow$ Logik

$\cap \quad \cup \quad A^c \qquad\qquad \wedge \quad \vee \quad \neg$

K.I.

Produktionssysteme

Konfidenz		
50%	R1 :	if $(\overbrace{\text{battery dead}}^{80\%}) \rightarrow$ push
90%	R2 :	if $(\overbrace{\text{motor stop}}^{20\%}) \rightarrow$ start
⋮	R3 :	⋮
	R4 :	

$$\underbrace{V_1}_{50\%} \wedge \underbrace{V_2}_{30\%} \longrightarrow \underset{?}{K}$$

- Dempster-Shaffer-Theorie (CF = certainty factor)
- Bayes-Netze (Wahrscheinlichkeiten)
- Fuzzy-Logik

$\hookrightarrow$ CF(battery dead) $\in \{-1, 1\}$

70er Jahren – Lotfi Zadeh

Menge

$$A = \{x_1, x_3, x_5\}$$

$$U = \{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$$

Charakteristische Funktion
Zugehörigkeitsfunktion

$$A = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$A = 1/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + \dots + 0/x_{10}$$

Verallgemeinerung

$$B = 0.5/x_1 + 0.2/x_2 + 0/x_3 + \dots + 1/x_{10}$$

↑

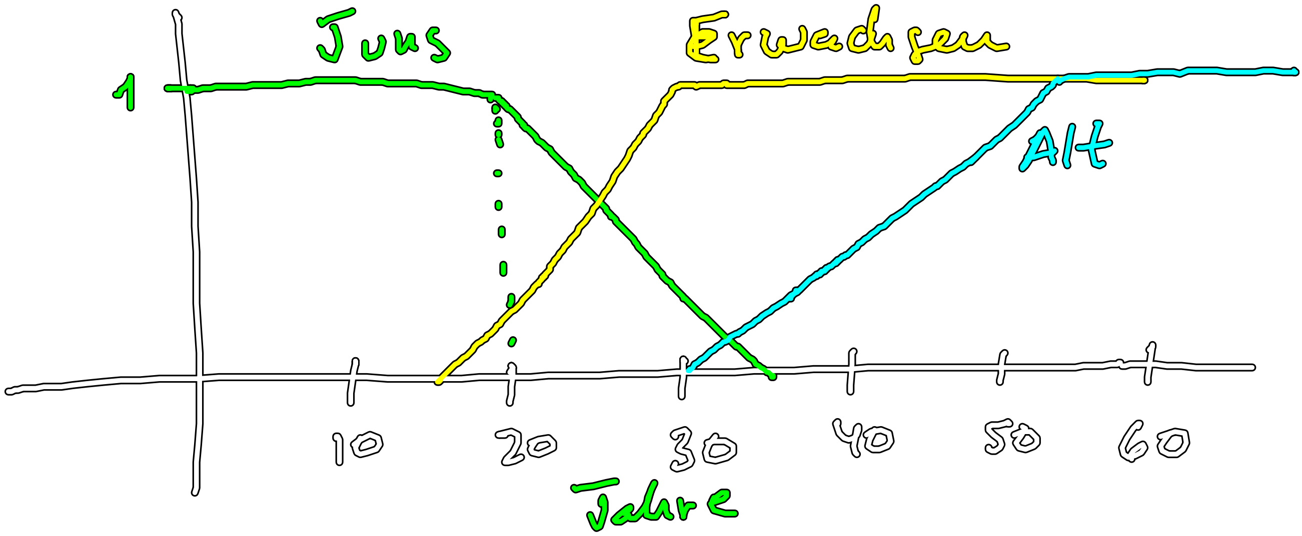
Fuzzy Menge

Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu : U \longrightarrow [0, 1]$$

$$B = \mu(x_1)/x_1 + \mu(x_2)/x_2 + \dots$$

↑ Fuzzy Menge



$$\begin{cases} \text{Jung} = 1/1 + 1/2 + \dots 1/20 + .9/21 + \dots 0/35 \\ \text{Erwachsen} = 0/1 + \dots + 1/30 + \dots \\ \text{Alt} = 0/1 + \dots + 1/60 + \dots \end{cases}$$

? "Paul ist 23 Jahre alt"

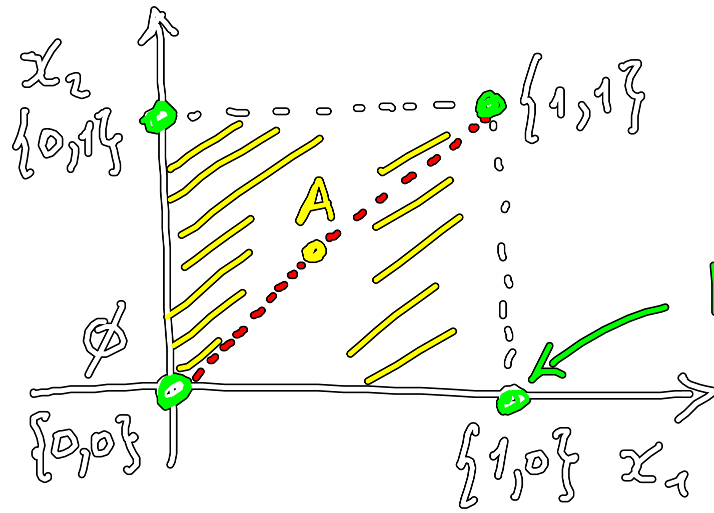
? "Geht Paul in die Disco"?

$$\underline{70\%} \quad R_1: \quad \text{if}\ (\underbrace{\text{jung}}_{90\%}) \rightarrow \underbrace{\text{Disco}}_{63\%}$$

$\times$

Operatoren

$U = \{x_1, x_2\}$



"Entropie"

Klassisch

$$U \qquad \underbrace{\overset{\text{Mengen}}{A \quad B}}$$

$$\text{Max}\left\{\begin{array}{l} A = \{0{,}5/x_1,\ 0{,}3/x_2,\ 0{,}9/x_3\} \\ B = \{0{,}1/x_1,\ 0/x_2,\ 1/x_3\} \end{array}\right.$$

$$A = \{1/x_1,\ 0/x_2\}$$

Max

$$B = \{0/x_1,\ 1/x_2\}$$

$$A \cup B = \{1/x_1,\ 1/x_2\}$$

$$A \,\tilde{\cup}\, B = \{0{,}5/x_1,\ 0{,}3/x_2,\ 1/x_3\}$$

$$\mu_{A \cup B} = \max(\mu_A, \mu_B)$$

ZF der Menge A (zu μ_A)

ZF der Menge B (zu μ_B)

$A \cap B = \emptyset$ $\quad A = \{1/x_1, 0/x_2\}$ $\quad B = \{0/x_1, 1/x_2\}$

$$\mu_{A \cap B} = \min(\mu_A, \mu_B)$$

$A = \{0{,}5/x_1\}$

$B = \{0{,}5/x_1\}$

$A \overset{S_1}{\cap} B = \{0{,}25/x_1\}$

$A = \{0{,}5/x_1\}$

$B = \{0{,}6/x_1\}$

$A \overset{S_2}{\cap} B = \{0{,}55/x_1\}$

μ Zugehörigkeitsfunktion

Komplement

$$A = \{0{,}3/x_1, 0{,}5/x_2\}$$

$$A^c = \{0{,}7/x_1, 0{,}5/x_2\}$$

$$\mu_{A^c} = 1 - \mu_A$$

Bis hier:

$$\tilde{\cap} \quad \tilde{\cup} \quad \tilde{c}$$

Kardinalität

$$|A| = \sum_{x \in A} \mu(x)$$

$$A = \{0{,}1/x_1,\ 0{,}5/x_2\}$$

$$|A| = 0{,}6$$

Def:

Entropie einer Menge A

$$E = \frac{|A \cap A^c|}{|A \cup A^c|}$$

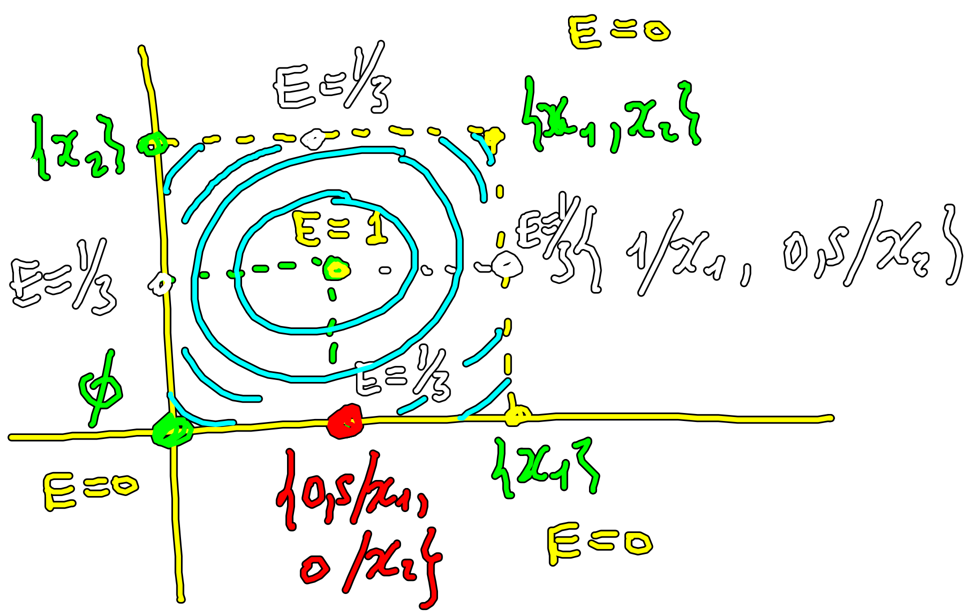
klassisch A

$$E = \frac{|A \cap A^c|}{|A \cup A^c|} = \frac{|\emptyset|}{|U|} = 0$$

$$A = \{0{,}5/x_1 \,,\, 0{,}5/x_2\}$$

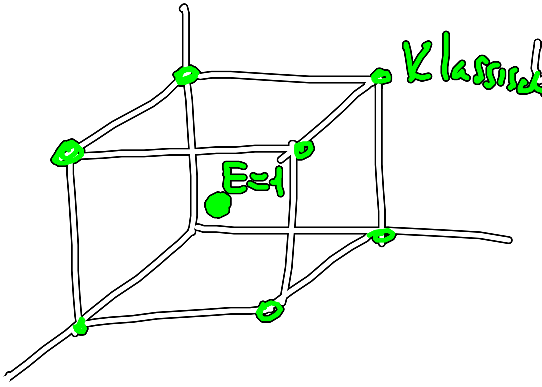
$$A^c = A$$

$$E_A = \frac{|\{0{,}5/x_1 \,,\, 0{,}5/x_2\}|}{|\{0{,}5/x_1 \,,\, 0{,}5/x_2\}|} = \frac{1}{1} = 1$$



$$E = \frac{|\{0{,}5/x_1 \,,\, 0/x_2\}|}{|\{0{,}5/x_1 \,,\, 1/x_2\}|} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3}$$

$$E = \frac{|\{0/x_1 \,,\, 0{,}5/x_2\}|}{|\{1/x_1 \,,\, 0{,}5/x_2\}|} = \frac{1}{3}$$



$U = \{x_1, \dots x_{100}\}$

Mengenlehre → Logik

Wahrheitswerte 0, 1

Dreiwertige Logik 0, 1, u

$\wedge$ Konj.

$\vee$ Disj.

A	B	$A \wedge B$
0 ∧	1	0
0 ∧	u	0
u ∧	u	u
0 ∧	0	0
⋮		

A	B	$A \vee B$
0 ∨	0	0
0 ∨	u	u
1 ∨	u	1
⋮		

Wahrheitswerte $\in [0, 1]$

Aussage A $\mu : U \to [0,1]$

$\mu(A) = 0{,}3$

↑

Wahrheitswertfunktion

$$\mu(B) = 0{,}5$$

$$\mu(A \wedge B) = \min(\mu(A), \mu(B))$$

Klassisch

$$\min(0,0) = 0$$
$$\min(1,0) = 0$$
$$\min(1,1) = 1$$

$$\mu(A \vee B) = \max(\mu(A), \mu(B))$$

$$\max(0,0) = 0$$
$$\max(1,0) = 1$$
$$\max(1,1) = 1$$

$$\mu(\neg A) = 1 - \mu(A)$$

$$\neg 0 = 1$$
$$\neg 1 = 0$$

<u>Eigenschaften</u> $\tilde{\vee}$

Axiom 1: Klassische Logik enthalten

$$0 \tilde{\vee} 0 = 0$$
$$0 \tilde{\vee} 1 = 1$$
$$1 \tilde{\vee} 0 = 1$$
$$1 \tilde{\vee} 1 = 1$$

Axiom 2: Kommutativität

$$a \tilde{\vee} b \equiv b \tilde{\vee} a$$

Axiom 3: Monotonie

$$\mu(a) \leq \mu(a')$$
$$\mu(b) \leq \mu(b')$$

$$\mu(a \tilde{\vee} b) \leq \mu(a' \tilde{\vee} b')$$

Axiom 4: Assoziativität

$$(a \tilde{\vee} b) \tilde{\vee} c \equiv a \tilde{\vee} (b \tilde{\vee} c)$$

Ist „max" die einzige die Axiom 1 bis 4 erfüllt?

$$\mu(a \tilde{\vee} b) = \underline{\max}(\mu(a), \mu(b))$$
$$\mu(a \tilde{\vee} b) = \min(1, \mu(a) + \mu(b))$$

Überprüfung:

$0 \tilde{\vee} 0 = 0$
$0 \tilde{\vee} 1 = 1$ ✓
$1 \tilde{\vee} 1 = 1$
$1 \tilde{\vee} 1 = 1$

Kommutativ? ✓

Monoton? ✓ $\mu(a) \leq \mu(a')$
$\mu(b) \leq \mu(b')$

$$\min(1, \mu(a)+\mu(b)) \overset{?}{\leq} \min(1, \mu(a')+\mu(b'))$$

Assoziativ? ✓

$$\min(1, \min(1, \mu(a)+\mu(b)) + \mu(c))$$
$$= \min(1, \mu(a) + \min(1, \mu(b)+\mu(c)))$$

Es gibt <u>viele</u> Fuzzy-Operatoren!

$$\mu(a \,\tilde{\tilde{\vee}}\, b) = \min\left(1, (\mu(a)^p + \mu(b)^p)^{1/p}\right)$$
$$p \geq 1$$

Zusätzliches Axiom

$$* \begin{cases} AS: \text{ Idempotent} \\ \qquad a \tilde{\vee} a = a \end{cases}$$

$$\max(\mu(a), \mu(a)) = \mu(a)$$
$$\min(1, \mu(a) + \mu(a)) \neq \mu(a)$$

Ähnlich für die Konjunktion

Kommutativ

Assoziativ

Klassische Logik drin

Monotonie

Ähnlich wie für die Negation

$$\text{K.B.} \begin{cases} \tilde{\neg} 0 = 1 \\ \tilde{\neg} 1 = 0 \end{cases}$$

Monotonie $\quad \mu(a) \leq \mu(b)$

$$\mu(\tilde{\neg} b) \leq \mu(\tilde{\neg} a)$$

Anwendung

Regelung: mit einfachen Regeln

Temperatur ⟶ Heizung

Kategorien

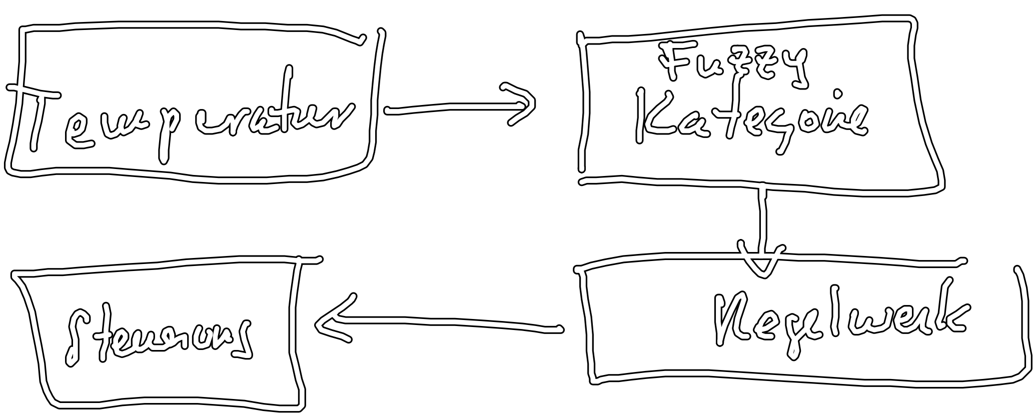
R1: if (kalt) → erhitzen

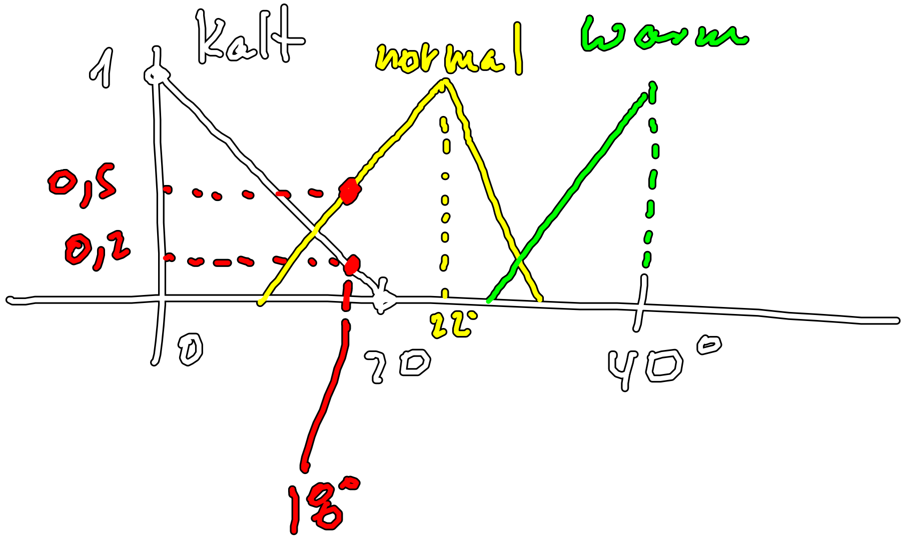
R2: if (normal) → normal

R3: if (warm) → kühlen

"computing with words"

Temp = 25°



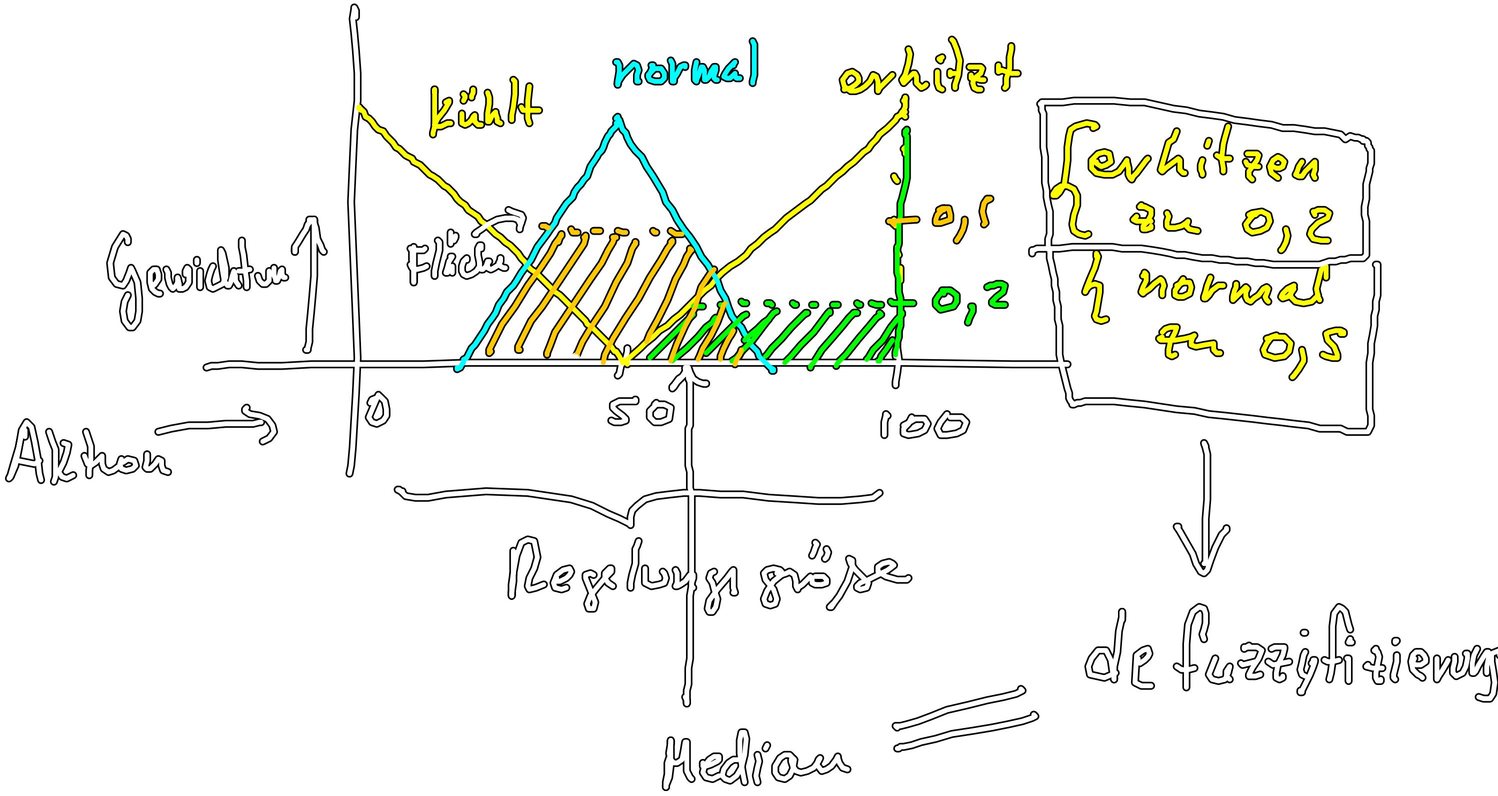


$$\text{Temp } 18° = 0{,}2/\text{Kalt} + 0{,}5/\text{normal} + 0/\text{warm}$$

Regelwerk:

$$\left.\begin{array}{lll} R1 & \text{zu} & 0{,}2 \\ R2 & \text{zu} & 0{,}5 \\ R3 & \text{zu} & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{\text{Strom}}$$

"Kennlinien"


kühlt
normal
erhitzt
Gewichten
Fläche
0,5
0,2
0
50
100
Aktion
Regelungsgröße
erhitzen zu 0,2
normal zu 0,5
defuzzyfizierung
Median