Grundlagen der theoretischen Informatik, SS 2005 — 6. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 30. Mai 2005, 10:15 Uhr

---

42. Welche der beiden folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen oder widerlegen Sie sie.
    (a) Wenn L_1 und L_2 entscheidbar sind, dann ist auch L_1L_2 entscheidbar.
    (b) Wenn L_1 und L_2 rekursiv aufzählbar sind, dann ist auch L_1L_2 rekursiv aufzählbar.

43. (10 Punkte) $D = \{\, w_i \mid M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht} \,\}$ bezeichnet die Diagonalsprache und $\bar{D}$ ihr Komplement.
    (a) Zeigen Sie, dass die Sprache $\bar{D}$ rekursiv aufzählbar ist.
    (b) Zeigen Sie, dass die Sprache $0D \cup 1\bar{D}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

44. (2 Zusatzpunkte) Eine andere Konstruktion einer unentscheidbaren Sprache.

$$U' := \{\, \langle M \rangle w \mid M \text{ akzeptiert das Wort } \langle M \rangle w \text{ nicht} \,\}$$

    (Der Beweis geht ähnlich wie bei der Diagonalsprache D.)

45. Welche der folgenden Sprachen sind rekursiv, welche sind rekursiv aufzählbar?
    (a) $L_1 = \{\, 0^k \langle M \rangle w \mid M \text{ akzeptiert } w \text{ nach höchstens } k \text{ Schritten.} \,\}$
    (b) $L_2 = \{\, 0^k \langle M \rangle w \mid M \text{ hat } w \text{ nach } k \text{ Schritten noch nicht akzeptiert.} \,\}$
    (c) $L_3 = \Sigma^* - (L_1 \cup L_2)$
    (d) $L_4 = \{\, 0^k \langle M \rangle w \mid M \text{ akzeptiert } w \text{ nach mehr als } k \text{ Schritten.} \,\}$

46. Beweisen Sie, dass die Sprache $L = \{\, 0^i \mid i \geq 0, \text{ das Teilwort } 0^i123 \text{ kommt in der Dezimaldarstellung von } \pi \text{ unendlich oft vor} \,\}$ entscheidbar ist. (Sie müssen dazu nichts über π wissen, nur logisch überlegen können. Wie kann L aussehen?)

47. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, und welche sind falsch? Welche Aussagen sind trivial, und welche sind absurd?
    (a) Jede Teilmenge einer rekursiven Sprache ist rekursiv.
    (b) Jede Teilmenge einer rekursiv aufzählbaren Sprache ist rekursiv aufzählbar.
    (c) Die Vereinigung zweier entscheidbarer Sprachen ist entscheidbar.
    (d) Die Vereinigung zweier rekursiv aufzählbarer Sprachen ist rekursiv aufzählbar.
    (e) Die Schnittmenge zweier entscheidbarer Sprachen ist entscheidbar.
    (f) Die Schnittmenge zweier rekursiv aufzählbarer Sprachen ist rekursiv aufzählbar.
    (g) Die Schnittmenge einer rekursiv aufzählbaren Sprache und einer entscheidbaren Sprache ist rekursiv aufzählbar.
    (h) Jede reguläre Sprache ist rekursiv aufzählbar.
    (i) Jede Teilmenge einer regulären Sprache ist regulär.

48. Zeigen Sie:
    (a) Die rekursiven Sprachen sind unter Differenz abgeschlossen. (Das heißt: Mit L_1 und L_2 ist auch $L_1 - L_2$ immer rekursiv.)
    (b) Die rekursiv aufzählbaren Sprachen sind unter Differenz nicht abgeschlossen.