Helmut Alt
Claudia Klost

SS 2004

15. Juni 2004

9. Übung zu Algorithmen für Fortgeschrittene

1. Aufgabe (10 Punkte)

Für eine $(n \times n)$- Matrix A sei $A^0 = I_n$, $A^1 = A$ und allgemein für andere natürliche Zahlen k, A^k das k-fache Produkt von A mit sich selbst. Es sei

$$A^* = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

falls diese Summe definiert ist.

a) Erklären Sie die Bedeutung von A^k und A^* im Fall der Booleschen Matrizenmultiplikation, wenn A als Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen betrachtet wird. Wie lässt sich in diesem Fall A^* als endliche Summe darstellen?

b) Welche Struktur mit welchen Operationen $+$ und $\cdot$ muss man zugrunde legen, damit $(A^*)_{ij}$ den kürzesten Weg zwischen den Knoten i und j eines gerichteten Graphen bedeutet?

c) Zeigen Sie, dass man $*$-Bildung folgendermaßen auf Matrizenmultiplikation zurückführen kann. Wenn man eine $(n \times n)$- Matrix A in 4 $(n/2 \times n/2)$-Matrizen zerlegt

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix},$$

gilt für A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} F & FCE^* \\ E^*DF & E^* + E^*DFCE^* \end{pmatrix},$$

wobei $F = (B+CE^*D)^*$. Begründen Sie diese Identität! Welche Laufzeit erhält man für einen darauf aufbauenden divide-and-conquer-Algorithmus, wenn ein Matrizenmultiplikationsalgorithmus der Laufzeit $M(n)$ benutzt wird und man annimmt, dass A^* für eine (1×1)- Matrix A in konstanter Zeit berechnet werden kann?

d) Einen Algorithmus wofür und von welcher Laufzeit erhält man durch Anwendung von c) auf a) ? Wie schnell kann man kürzeste Wege in Graphen berechnen durch Anwendung von c) auf b) ?

2. Aufgabe (10 Punkte)

Implementieren Sie die diskrete Fourier-Transformation. Ihre Implementierung sollte hinreichend generisch sein, dass Sie für alle möglichen Körper mit Einheitswurzeln eingesetzt werden kann, insbesondere für die komplexen Zahlen und für Restklassenkörper der Form $\mathbb{Z}_p$. Wenden Sie Ihr Programm auf die Multiplikation von Polynomen mit vielen Koeffizienten und auf Mustererkennung bei $0-1-$Strings an.

Abgabe: 24.6.2004, vor der Vorlesung