DCEL: Eine Datenstruktur für ebene Unterteilungen

(Literatur: deBerg et al., Kapitel 2)

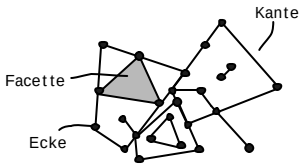
Ebene Unterteilungen …

- G=(V,E) eingebetteter, planarer Graph
  - jeder Ecke v von G ist ein Punkt p(v) zugeordnet
  - jeder Kante e={u,v} von G ist eine Strecke s(e) zugeordnet
  - p(u) und p(v) sind die Endpunkte der Strecke s(e)
  - die Strecken {s(e) | e Kante von G} schneiden sich nicht

… Ebene Unterteilungen …

- G induziert eine ebene Unterteilung U(G)
  - Einbettungen der Ecken von G heissen Ecken von U(G)
  - Einbettungen der Kanten von G heissen Kanten von U(G)
  - eine maximal zusammenhängende Teilmenge der Ebene, die keine Ecken von U(G) oder Punkte einer Kante von U(G) enthält, heisst Facette von U(G)
  - U(G) heisst zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist
  - Komplexität von U(G) := |Ecken|+|Kanten|+|Facetten|
  - Ecke p heisst inzident zu Kante s, falls p Endpunkt von s
  - Kante s (Ecke p) heisst inzident zu Facette f, falls s (p) auf dem Rand von f liegt
- Annahme: es gibt keine isolierten Ecken

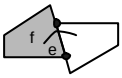
… Ebene Unterteilungen



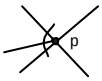
Lokale Operationen auf ebene Unterteilungen

- durchlaufe die zu einer Facette f inzidenten Kanten zyklisch

- finde zu einer Facette f und einer dazu inzidenten Kante e die Facette g, die e mit f gemeinsam hat



- durchlaufe alle zu einer Ecke p inzidenten Kanten zyklisch

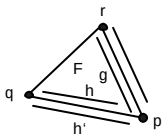


Doppelt verkettete Kantenliste (DCEL)

- DCEL = doubly-connected edge list
- speichert einen Eintrag für jede Facette, Kante und Ecke
  - geometrische und topologische Informationen
  - ggf. zusätzliche Attribute (Farbe, etc.)
- unterstützte Operationen
  - inzidente Kanten einer Facette zyklisch durchlaufen
  - von einer Facette f über eine Kante e von f zur zweiten, zu e adjazenten Facette gehen
  - inzidente Kanten einer Ecke zyklisch durchlaufen
  - Einfügen von Ecken auf (= unterteilen von) Kanten
  - Einfügen von Kanten zwischen Ecken (= Spalten von Facetten)
- Platzbedarf O(Komplexität der ebenen Unterteilung)

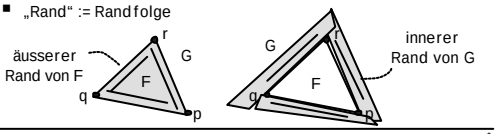
Darstellung von Kanten in der DCEL

- die Kante e mit den Ecken p,q wird dargestellt durch die beiden (orientierten) Halbkanten h(e)=(p,q) und h'(e)=(q,p)
  - h' heisst der Zwilling von h (und umgekehrt)
  - p heisst der Anfang von h, q heisst das Ende von h
  - falls g=(r,p) und h=(p,q), so heissen g und h aufeinander-folgend (i.allg. gibt es mehrere Halbkanten die auf g folgen)
  - die Facette F „links" von h heisst die Facette von h



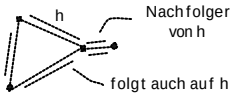
Darstellung von Facetten in der DCEL …

- eine Facette F wird durch eine Menge von Randfolgen dargestellt
  - eine Randfolge R von F ist eine maximale zyklische Folge von paarweise verschiedenen, jeweils aufeinander folgenden, Halbkanten von F
  - die Halbkanten einer Randfolge R durchlaufen den Rand der zugehörenden Facette
    - geschieht dies gegen den Uhrzeigersinn, so heisst R äusserer Rand, ansonsten innerer Rand von F
  - „Rand" := Randfolge



… Darstellung von Facetten in der DCEL

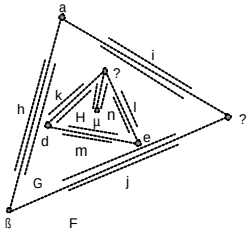
- jede beschränkte Facette hat genau einen äusseren Rand
- die Anzahl der inneren Ränder von F entspricht der Anzahl der Löcher von F (im graphentheoretischen Sinn)
- jede Halbkante h gehört zu genau einem Rand
  - die Ränder verschiedener Facetten sind disjunkt
  - die Ränder einer Facette sind disjunkt
  - wenn F die Facette von h ist, so gehört h zu einer der Randfolgen von F
- jede Halbkante hat somit einen eindeutig bestimmten Vorgänger und Nachfolger



Einträge in der DCEL: Ecken …

- der Eintrag für eine Ecke p=(x,y) speichert
  - die Koordinaten (x,y) von p
  - einen Zeiger **`InzidenteHalbkante(p)`** auf den Eintrag einer *beliebigen*, zu p inzidenten Halbkante, deren Anfang p ist

… Einträge in der DCEL: Ecken …

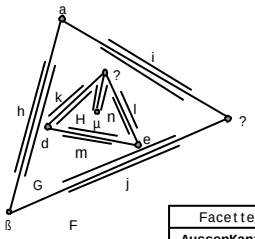


Ecke	a	**ß**	**?**	d	e	?	μ
`InzidenteHalbkante`	i	j'	i'	k	m	k'	n'

… Einträge in der DCEL: Facetten …

- der Eintrag für eine Facette f speichert
  - einen Zeiger **`AussenKante(f)`** auf den Eintrag einer *beliebigen* Halbkante auf dem äusseren Rand von f
  - eine Liste **`InnenKanten(f)`**, die für jeden inneren Rand R von f einen Zeiger auf den Eintrag einer *beliebigen* Halbkante von R speichert

… Einträge in der DCEL: Facetten …

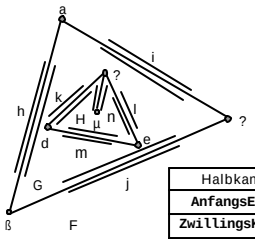


Facette	F	G	H
AussenKante	-	h'	n
InnenKanten	{i}	{m}	-

… Einträge in der DCEL: Kanten …

- der Eintrag für eine Halbkante h=(p,q) speichert
  - einen Zeiger **`AnfangsEcke(h)`** auf den Eintrag für die Ecke p
  - einen Zeiger **`ZwillingsKante(h)`** auf den Eintrag für die Halbkante h'=(q,p)
  - einen Zeiger **`Facette(h)`** auf den Eintrag für die Facette von h
  - einen Zeiger **`NachfolgerKante(h)`** auf den Eintrag für den Nachfolger von h
  - einen Zeiger **`VorgängerKante(h)`** auf den Eintrag für den Vorgänger von h

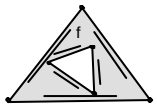
… Einträge in der DCEL: Kanten



Halbkante	h	i	j	k	l	m	n
AnfangsEcke	ß	a	?	d	?	e	?
ZwillingsKante	h'	i'	j'	k'	l'	m'	n'
Facette	F	F	F	G	G	G	H
NachfolgerKante	i	j	h	l	m	k	n'
VorgängerKante	j	h	i	m	k	l	l'

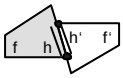
Operationen auf der DCEL …

- inzidente Halbkanten einer Facette f zyklisch durchlaufen
  - zyklisches Durchlaufen der Halbkantenliste ausgehend von **`AussenKante(f)`** über **`NachfolgerKante()`** (→ Durchlauf des äusseren Randes von f gegen den Uhrzeigersinn) und
  - für jeden Zeiger h auf eine Halbkante in **`InnenKanten(f)`** zyklisches Durchlaufen der Halbkantenliste ausgehend von h über **`NachfolgerKante()`** (→ Durchlauf der inneren Ränder von f im Uhrzeigersinn)
  - O(1) Zeit pro Kante



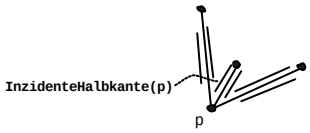
… Operationen auf der DCEL …

- von einer Facette f über eine Halbkante h von f zur gegenüberliegenden (= zu h' adjazenten) Facette f' gehen
  - **`Facette(ZwillingsKante(h))`** zeigt auf den Eintrag für die Facette f'
  - O(1) Zeit pro Operation



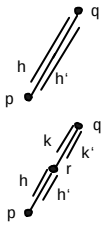
… Operationen auf der DCEL …

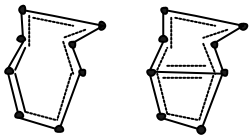
- inzidente Kanten einer Ecke p zyklisch durchlaufen
  - starte bei **`InzidenteHalbkante(p)`**
  - der Nachfolger einer Halbkante h in der zyklischen Ordnung um p ist **`NachfolgerKante(ZwillingsKante(h))`**
  - Durchlauf erfolgt im Uhrzeigersinn
  - O(1) Zeit pro Kante



… Operationen auf der DCEL …

- Einfügen einer Ecke r auf einer Halkante h=(p,q)
  - erzeuge eine neue Halbkante k und ihren Zwilling k‘ (als *Kopie* von h bzw. h‘)
  - setze **`InzidenteHalbkante(q)`** auf k‘
  - setze **`InzidenteHalbkante(r)`** auf k
  - setze **`AnfangsEcke(k)`** auf r
  - setze **`AnfangsEcke(h‘)`** auf r
  - setze **`NachfolgerKante(h)`** auf k
  - setze **`VorgängerKante(h‘)`** auf k‘
  - setze **`VorgängerKante(k)`** auf h
  - setze **`NachfolgerKante(k‘)`** auf h‘
  - O(1) Zeit pro Operation



… Operationen auf der DCEL

- Einfügen einer Kante zwischen zwei Ecken p,q einer Facette f *ohne innere Ränder*
  - Verzeigerung der zu p,q inzidenten Halbkanten von f anpassen
  - **`Facette()`**-Zeiger der Halbkanten auf der kleineren Facette anpassen
  - O(Komplexität der kleineren Facette) Zeit