

Die Weltformel: Wie man ein Auto einparkt

Raul Rojas
Freie Universität Berlin

Februar 2010

Zusammenfassung

Wir betrachten das Einparken eines Fahrzeugs mit Ackermann-Lenkung in nur zwei Bewegungen. Es zeigt sich, dass die notwendigen Schritte relativ einfach sind und mit wenig Aufwand elektronisch ausgeführt werden können. Einige Erfahrungen aus der Praxis werden mit den folgenden Formeln und Diagrammen besser verständlich.

Ackermann-Lenkung

Autos können eigentlich nur im Kreis fahren: Wird nach rechts oder links gelenkt, bewegt sich das Auto in einem Kreis mit größeren oder kleineren Radius, je nach Einstellung des Lenkrads. Abb. 1 zeigt ein Schema der in Autos verwendeten Ackermann-Lenkung. Das Rotationszentrum des Autos liegt auf der Fortsetzungsgeraden der hinteren Achse. Die genaue Position des Rotationszentrums ist durch den Winkel der Vorderräder gegeben. Diese Räder drehen nicht im selben Winkel: Das äußere Rad hat einen größeren, das innere Rad einen kleineren Rotationsradius (Abb. 1). Die Ackermann-Lenkung arbeitet mit Hilfe von Hebeln, die präzise diese unterschiedlichen Rotationsradien der vorderen Räder einstellen können. Wenn man über den Rotationsradius von Autos spricht, bezieht man sich meistens auf das hintere äußere Rad (in Bezug auf das Rotationszentrum).

Wenn man ein Auto sicher einparken will, stellt man sich parallel zum Vorderauto, und zwar so, dass die Hinterachse des eigenen Fahrzeugs genau am Ende des

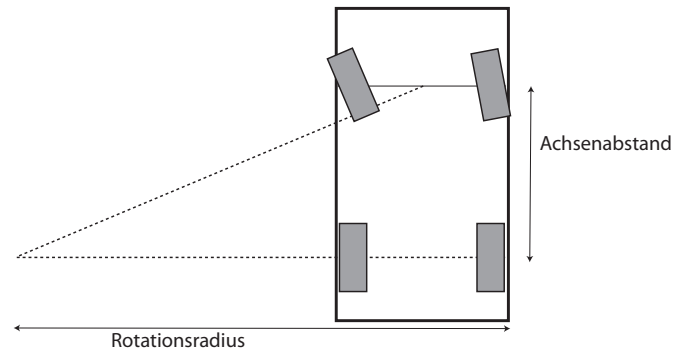


Abbildung 1: Ackermann-Lenkung. Die Vorderräder drehen in unterschiedlichen Winkeln

Vorderfahrzeugs stehen bleibt (Abb. 2). Wenn man dann nach rechts einlenkt und rückwärts fährt, bewegt sich das Auto in einem Kreis. Kein Teil des eigenen Fahrzeugs kann das Vorderauto berühren, wie man in der Abbildung erkennt, da der Punkt mit dem minimalen Abstand zum Rotationszentrum die Mitte des rechten Hinterrades ist.

Man kann damit in zwei Schritte einparken: a) Zuerst lenkt man nach rechts und fährt rückwärts, womit das Auto sich um das Vorderauto dreht; b) nun stoppt man das Auto, lenkt in die andere Richtung und fährt rückwärts bis das Auto parallel zum Bürgersteig steht. Im optimalen Fall wird nur zwei Mal gelenkt (mit einem Zwischenstopp).

Dimensionen des Autos

Wichtig für das Einparken ist der minimale Rotationsradius des Autos. Dieser wird vom Hersteller festgelegt. Je stärker das Auto drehen kann, desto einfacher sollte das Einparken sein. Wichtig ist auch der Abstand von der Hinterachse zum vordersten Punkt des Autos. Die rechte vordere Ecke des eigenen Fahrzeugs muss in die Lücke hineinfahren können. Diese Ecke ist der exponierteste Teil des Autos beim Parken. Wenn aber die rechte Ecke des Fahrzeugs hineinfährt, dann kann mit dem Rest des Autos nichts mehr misslingen (vorausgesetzt man hat genug Platz in der Parklücke).

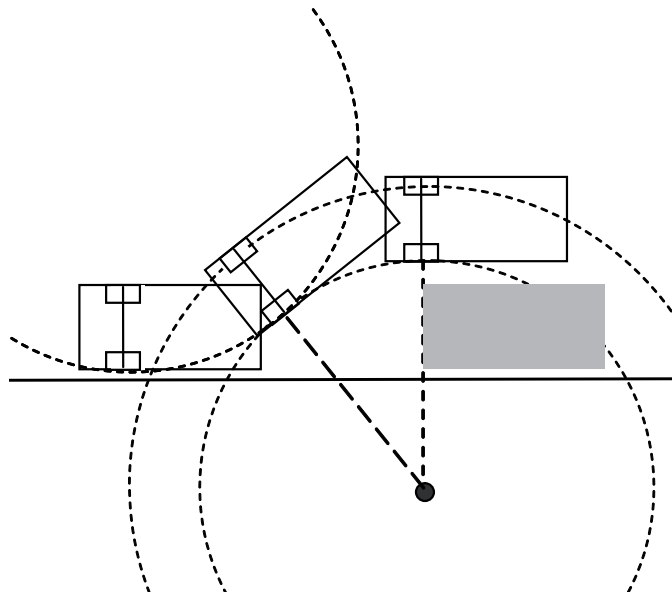


Abbildung 2: Paralleles Einparken in zwei Schritten

Minimale Parklücke

Abb. 3 zeigt, wie man die minimale Parklücke berechnen kann. Sei b der Abstand von der Hinterachse zum vordersten Punkt des Autos. Sei R der minimale Rotationsradius (entspricht der maximalen Einlenkung), wie vom Hersteller festgelegt. Sei a die Breite des eigenen Fahrzeugs (in unserem Beispiel haben beide Fahrzeuge die Breite a). Die Breite des Fahrzeugs wird etwas aufgeblasen, so dass man bei den folgenden Berechnungen einen Sicherheitsabstand rund ums Auto hat. Ist das Auto 1,8 Meter breit, kann man z.B. das Auto in der folgenden Formel als 2,2 Meter breit einsetzen, um 20 cm Sicherheitsabstand links und rechts zu erhalten. Die minimale Parklücke ist diejenige, aus der das Auto mit der maximalen Lenkung nach links in einer Bewegung herausfahren kann, wie in der Abbildung gezeigt. R_e ist dabei der Rotationsradius der rechten vorderen Ecke um den Rotationspunkt. Es gilt, nach Pythagoras:

$$\begin{aligned}
 R_e^2 &= R^2 + b^2 \\
 h^2 &= R_e^2 - (R - a)^2 \\
 &= R^2 + b^2 - (R - a)^2 \\
 &= b^2 - a^2 + 2aR
 \end{aligned}$$

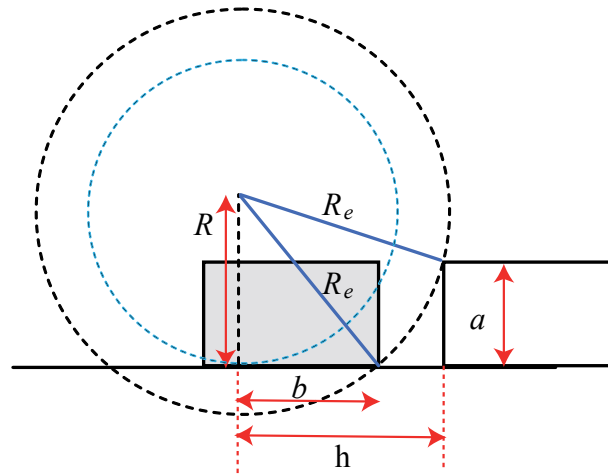


Abbildung 3: Relevante Dimensionen für die minimale Parklücke

Die minimale Parklücke ist also so lang wie das Auto plus $(h-b)$. Diese Zahl ist der Platz, den vor dem eigenen Auto benötigt wird um mit einer einzigen Bewegung herauszufahren. Beim Einparken wird diese Aktion rückwärts ausgeführt.

Einparken

Es ist einfacher, das Einparken zu analysieren, wenn man die Bewegung umgekehrt abspielt, d.h. das Auto soll aus der Lücke herausfahren und in die Parallelposition gelangen. Wenn man die minimale Parklücke hat und die Lenkung nach links maximal einschlägt, wie oben beschrieben, brauchen wir nur aus der Lücke herauszufahren (d.h. die rechte vordere Ecke muss noch vorbei kommen), und dann lenken wir nach rechts, bis die Hinterachse des eigenen Fahrzeugs in die parallele Parkposition kommt. Das Einparken geschieht umgekehrt, als ob wir den Film rückwärts abspielen würden, wie im Folgenden beschrieben.

Das Auto startet also aus der parallelen Parkposition und rotiert mit dem Radius R_0 um das Rotationszentrum B . Unterwegs stoppt das Auto, es wird maximal nach links gelenkt, und das Auto fährt in die zuvor berechnete minimale Parklücke.

Der Winkel, bei dem das Auto stoppt, nennen wir θ . Wenn sich das Auto bei der ersten Bewegung um θ gedreht hat, muss es in der zweiten Bewegung in die andere Richtung auch um den Winkel θ drehen, so dass es am Ende parallel zum Bürgersteig steht.

Während R hier den minimalen Rotationsradius darstellt, kann R_0 etwas größer als R sein, wenn z.B. ein sehr langes Auto eingeparkt werden soll. In diesem Fall kann man nicht so stark nach rechts einlenken. Die dickere Linie im Diagramm repräsentiert die ideale Parkposition. Die Kreise zeigen die Bewegung des Rads an der Hinterachse bzw. der vorderen rechten Fahrzeugecke.

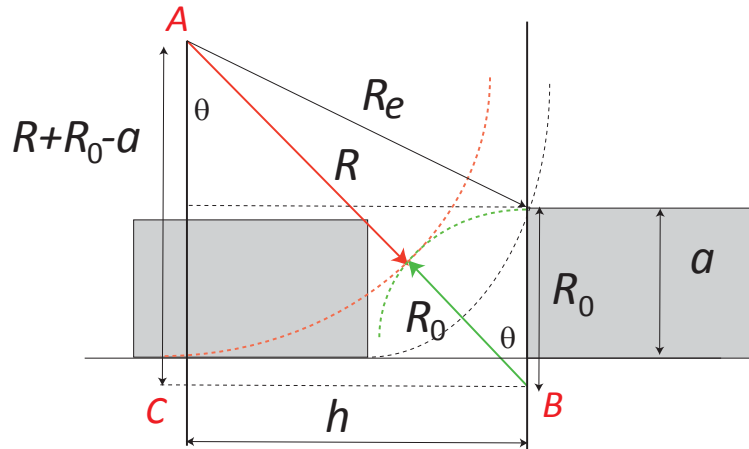


Abbildung 4: Parken in zwei Schritten. Das Auto beendet die Bewegung parallel zum Vorderauto.

Das Dreieck ABC (Abb. 4) liefert uns die notwendigen Relationen um den Wert von R_0 und θ zu finden. Es gilt:

$$\begin{aligned} ((R + R_0) - a)^2 + h^2 &= (R + R_0)^2 \\ -2a(R + R_0) + a^2 + h^2 &= 0 \end{aligned}$$

Wenn man $h^2 = b^2 - a^2 + 2aR$ in dem Ausdruck ersetzt, bekommen wir

$$-2aR - 2aR_0 + a^2 + b^2 - a^2 + 2aR = 0$$

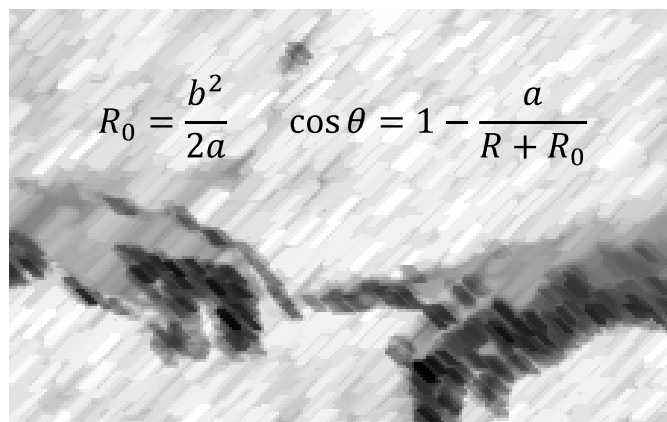
und daraus erhalten wir:

$$R_0 = \frac{b^2}{2a}$$

Der Winkel θ kann aus seinem Kosinus gefunden werden (im Dreieck ABC):

$$\cos \theta = \frac{R + R_0 - a}{R + R_0} = 1 - \frac{a}{R + R_0}$$

Die Einparken-Weltformel lautet, für den Rotationsradius am Anfang der Einparkbewegung und für den Stopp-Winkel für die Änderung der Lenkradstellung jeweils:



Warum Herausfahren einfacher als Hineinfahren ist

Es kann geschehen, dass wenn man die Daten des eigenen Fahrzeugs in obere Formel eingibt, diese einen Rotationsradius R_0 *kleiner* als der minimale Rotationsradius R anzeigt. Das Auto kann aber nicht in einem kleineren Kreis als mit Radius R drehen. In diesem Fall gibt es keine Lösung zum parallelen Einparken in zwei Bewegungen, wenn man aus der sicheren Position startet! Wenn man den Vorgang rückwärts denkt, erkennt man das Problem: man kann immer aus der Parklücke herausfahren (weil wir so die Länge der minimalen Parklücke berechnet haben), man hat aber nicht mehr genug Platz, um das Auto parallel zur Straße auszurichten, so dass die Hinterachse bündig mit dem Vorderauto steht. In diesem Fall wäre die optimale Position zum Einparken, nicht parallel zum Vorderauto zu starten, sondern in einem gewissen Winkel und zwar dem Winkel, den man beim Herausfahren hat.

Dies erklärt warum man manchmal in eine enge Lücke einparkt und zu weit vom Bürgersteig stehen bleibt. Es wird rangiert: Man fährt aus der Lücke raus und

erwischt dabei den optimalen Winkel. Ab da kann man dann mit zwei zusätzlichen Lenkbewegungen in die Lücke einfahren.

Dies erklärt auch, warum man manchmal so einfach aus engen Parklücken herausfährt, wobei man für das Einparken rangieren musste. Parallel Einparken kann in nur zwei Bewegungen unmöglich sein, während Herausfahren mit einer Bewegung bei ein und derselben Parklücke gelingt. In solchen Fällen fährt man quer zur Straße heraus, aber das stört keinen, man kann danach parallel in die Straße einlenken.

Wie man den Rotationsradius korrigiert

Falls $R_0 < R$ ist, kann man einfach so tun, als ob das Auto länger wäre. In dem Fall setzen wir R_0 gleich den minimalen Rotationsradius R und berechnen b als

$$b = \sqrt{2a/R}$$

Damit rechnen wir mit einem Sicherheitsabstand vor dem Auto, als ob dieses verlängert worden wäre. Dann braucht man zwar eine größere Parklücke (da ihre Länge von b abhängt), aber man kann parallel in zwei Bewegungen einparken und bei beiden benutzt man die maximale Einlenkung des Autos. Aus dem Gesagten wird klar, dass man parallel Einparken kann, und außerdem mit der maximalen Lenkradstellung bei beiden Einparkbewegungen, wenn die Spezifikation des Autos so ist, dass $b = \sqrt{2a/R}$. Setzt man die Dimensionen von verschiedenen kommerziellen Autos in die obere Formel ein, so ergibt sich daraus, dass keines der bekannten Modelle diesen 'goldenen Schnitt' erfüllt. Eine Musterberechnung für die meist verkauften Autos in den USA ergibt einen mittleren Rotationsradius von 5,6 Metern. Die mittlere Länge der Fahrzeuge ist 4,65 m, während die mittlere Breite bei 1,8 m liegt. Der mittlere Abstand zwischen den Achsen beträgt 2,7 m. Erhöht man die Breite der Fahrzeuge um etwa 30 cm, um einen Sicherheitsabstand zu gewährleisten, kann, nach diesen Daten, keines dieser Autos in nur zwei Bewegungen in die minimale Parklücke einfahren (wenn man aus der Parallelposition mit der Hinterachse am Ende des Vorderfahrzeugs anfängt). Man müsste dafür die Autos im Mittel gedanklich um 80 cm verlängern. Damit könnte man für die beiden Einparkschritte den minimalen Rotationsradius verwenden (d.h. es wird mit der Lenkung maximal nach rechts bzw. nach links eingeschlagen).

Kurioserweise sind die Daten von kommerziellen Fahrzeugen so ähnlich hinsichtlich des Rotationsradius, dass eine Berechnung des Winkels θ im Durchschnitt

36,1 Grad mit einer Standardabweichung von nur 0,6 Grad ergibt! Dies bedeutet, dass eine einfache Elektronik ein Auto fast blind einparken kann.

Wie man das Auto einparkt

Es gilt also für fast alle kommerziellen Fahrzeuge, dass man folgendermaßen Einparken kann:

1. Man stellt das eigene Auto mit der Hinterachse in eine Linie mit dem Ende des Vorderautos. Der Sicherheitsabstand beträgt 30 cm.
2. Die Lenkung wird maximal nach rechts eingeschlagen.
3. Man fährt rückwärts, bis das Auto sich um 36,1 Grad gedreht hat. Stopp.
4. Die Lenkung wird maximal nach links eingeschlagen.
5. Man fährt rückwärts, bis das Auto parallel zum Bürgersteig steht.
6. Man kann am Ende die Lücke zum Vorderauto kleiner machen, indem man ein Stück vorwärts fährt.

Warum sind Autos so ähnlich hinsichtlich des Rotationsradius?

Es ist erstaunlich, dass fast alle kommerziellen Autos so eingeparkt werden können. Der Grund mag darin liegen, dass die Rotationsradien nur geringfügig voneinander abweichen. Bei den 12 untersuchten Fahrzeugen war der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Rotationsradius weniger als 75 cm. Vielleicht liegt es daran, dass man an Kreuzungen um 90 Grad abbiegen muss, wobei man normalerweise auf der rechten Spur fährt. Sind Autos in der eigenen und in der Querstraße geparkt, braucht man einen Rotationsradius von etwa 6 Metern, wenn man annimmt, dass eine Spur 4 Meter breit ist. Da der mittlere Rotationsradius bei 5,6 m liegt und das Auto mit dem größten Rotationsradius 5,8 m erreichte, würden alle 12 untersuchten Fahrzeuge in so einer Situation bequem abbiegen.

Aggressives Einparken

Man kann in die optimale (minimale) Parklücke in zwei Bewegungen einfahren, wenn am Anfang die Hinterachse des Fahrzeugs nicht mit dem Ende des vorderen Autos in eine Linie gebracht wird. Man kann z.B. das Ende des eigenen Fahrzeugs mit dem Ende des Vorderautos auf eine Linie bringen und die Lenkung nach rechts einschlagen. Wenn die Hinterachse das Ende des Vorderautos erreicht, fährt der Wagen in einem aggressiveren Winkel in die Parklücke hinein. Man muss dabei jedoch sicherstellen, dass man mit dem hinteren Teil des Autos das geparkte Auto nicht streift. Die genaue Position des Fahrzeugs für eine optimale Einparkbewegung, ist auch etwas variabler und hängt stärker von der Länge des eigenen Autos ab, als wenn die Hinterachse als Referenz verwendet wird. Diesen Fall wollen wir aber durchrechnen.

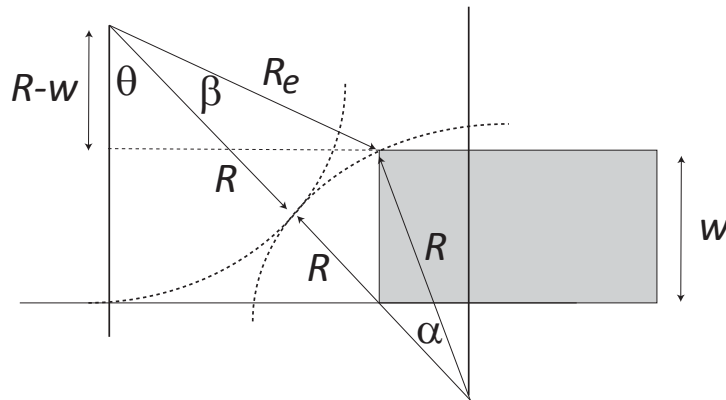


Abbildung 5: Parken in zwei Schritten in der minimalen Parklücke, wenn man etwas vorne startet.

Aus dem Kosinusetz für Dreiecke wissen wir, dass

$$(R + R)^2 + R^2 - 4R^2 \cos \alpha = R_e^2 = R^2 + b^2$$

und deswegen

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= (4R^2 - b^2)/4R^2 \\ &= 1 - b^2/4R^2 \end{aligned}$$

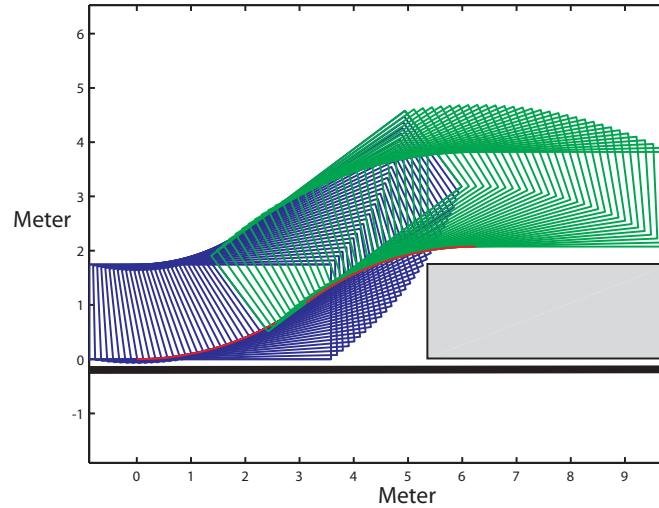


Abbildung 6: Bewegung eines Toyota-Prius beim Einparken

Da b und R bekannt sind, kann man α ausrechnen. Der Kosinus des Winkels β im Dreieck kann aus dem Sinus-Gesetz abgeleitet werden:

$$\frac{R}{\sin \beta} = \frac{R_e}{\sin \alpha}$$

Daraus ist

$$\beta = \arcsin \left((R/R_e) \sin \alpha \right)$$

Für den *Stoppwinkel* θ gilt nun:

$$\cos(\theta + \beta) = (R - w)/R_e$$

Wobei w die Breite des Fahrzeugs ohne Sicherheitsabstand ist.

Der Winkel α ist der *Angriffswinkel* des Fahrzeugs, wenn die Hinterachse das Ende des Vorfahrzeugs erreicht. Beim Parallelparken, wie oben zunächst beschrieben, war α Null. Will man die minimale Parklücke nutzen (und ist $R_0 < R$), muss α unterschiedlich von Null sein. Dies verändert den Stoppwinkel θ , der für die 12 untersuchten Fahrzeuge nun bei 36,7 Grad liegt, eine minimale Änderung. Der Hauptunterschied ist, dass man die Einparkbewegung etwas weiter vorne startet und aufpassen muss, das geparkte Fahrzeug nicht mit dem hinteren Kotflügel zu berühren. Gelingt dies, ändert sich das Einparkmanöver wenig. Abb. 6 zeigt die zwei Lenkphasen der Einparkbewegung eines Toyota Prius in die minimale Parklücke.

Fazit

Es ist möglich in zwei Schritten in die minimale Parklücke einzuparken, wenn man etwas steiler in die Lücke hineinfährt. Geht man auf Nummer sicher und startet parallel zum Vorderauto, mit der Hinterachse in einer Linie mit dem Ende des Vorderfahrzeugs, braucht man meistens eine größere als die minimale Parklücke. Leider ist fast kein kommerzielles Fahrzeug für das Einparken optimiert, eher für das Abbiegen an Kreuzungen. Auch kleine Fahrzeuge verzichten auf einen niedrigen Rotationsradius, einerseits um die Sicherheit zu erhöhen, andererseits um Platz im Motorraum zu sparen (da die Vorderräder beim Abbiegen Platz im Motorraum benötigen). Deswegen ist der Rotationsradius von fast allen kommerziellen Fahrzeugen so ähnlich. Nur Sonderfahrzeuge, wie die Londoner Taxis z.B., bieten Rotationsradien von unter 4 m. Und deswegen, aber nicht nur deswegen, ist Einparken schwierig.